

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

AFD. TOEGEPASTE WISKUNDE

Rapport TW 26  
ZW 1954-001

Gravitatiegolven in de hydrodynamica.

Door

T.C. Braakman.

Januari

1 9 5 4

## INHOUD:

§

	Pag.
Samenvatting	1
1. De theorie van zwaartekrachtsgolven van kleine amplitude	2
2. Periodieke oplossingen; eenduidigheid van oplossingen; oplossingen in de vorm van voortlopende golven	5
3. Twee eenvoudige voorbeelden	7
4. Bewijs van de eenduidigheid van de oplossing van het eerste voorbeeld in paragraaf 3	8
5. Overzicht van de verschillende problemen; een opmerking betreffende twee- en driedimensionale problemen	10
6. Overzicht van de voornaamste oplosmethoden	13
7. Literatuuroverzicht	14
8. Een voorbeeld van de reductiemethode	18
9. Een voorbeeld van de methode van Heins	24
Literatuurlijst	28



Voordracht door de Heer T.C. Braakman in de  
serie Actualiteiten op Zaterdag 30 Januari 1954.

Gravitatiegolven in de hydrodynamica.

Samenvatting.

In de hydrodynamica verstaat men onder gravitatiegolven golfbewegingen van kleine amplitude onder invloed van de zwaartekracht. Is de vloeistof homogeen, dan treden deze alleen op aan de oppervlakte, en men spreekt van oppervlaktegolven, in tegenstelling tot gelaagde vloeistoffen (d.w.z. vloeistoffen met discontinuïteitsoppervlakken in de dichtheid), waarbij ook zg. inwendige golven optreden.

Daar wij uitsluitend homogene vloeistoffen beschouwen, spreken we steeds van gravitatiegolven, waaronder men dan oppervlaktegolven moet verstaan. In de meeste in dit rapport genoemde publicaties worden de benamingen "gravity waves" en "surface waves" dooreen gebruikt, hoewel steeds sprake is van homogene vloeistoffen.

De bedoeling van dit rapport is een overzicht te geven van de recente literatuur over dit onderwerp, alsmede van de verschillende problemen, die in deze literatuur ter sprake komen, en van de voornaamste methoden, die voor de oplossing ten dienste staan, geïllustreerd met enige voorbeelden.

In § 1 wordt eerst de algemene inleidende theorie gegeven, waarna we speciaal ingaan op de exacte lineaire theorie, verkregen door de algemene theorie te lineariseren in de veronderstelling, dat de bewegingen "infinitesimaal" zijn.

We onderzoeken alleen bewegingen die enkelvoudig harmonisch van de tijd afhangen en in § 2 wordt aangetoond, dat we in dat geval bij tweedimensionale stroming te maken krijgen met de potentiaalvergelijking:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1)$$

en bij driedimensionale stroming met de golfvergelijking:

$$(\Delta - m^2) \varphi = 0, \quad m \text{ reeel} \quad (2)$$

De (lineaire en homogene) randvoorwaarden zijn voor (1) en (2) hetzelfde. De nuloplossing voldoet derhalve, en dat desalnietemin ook niet-triviale oplossingen bestaan, betekent dus dat deze problemen blijkbaar niet eenduidig een oplossing bepalen. De oorzaak hiervan ligt in de aard van de randvoorwaarde aan het vrije oppervlak.



Tengevolge van deze niet-eenduidigheid moeten we extra eisen aan de oplossingen stellen.

Wat ons in het bijzonder interesseert zijn oplossingen voor het tijd-afhankelijke probleem, die (eventueel alleen op oneindig) het karakter hebben van een voortlopende golf en we proberen dergelijke oplossingen te construeren door superpositie van twee oplossingen van het niet tijd-afhankelijke probleem, (die leveren staande golven), die zich (eventueel alleen op oneindig) gedragen als  $\cos x$ , respectievelijk  $\sin x$ .

In § 3 behandelen we twee eenvoudige voorbeelden, nl. een oneindig diep kanaal en een kanaal met eindige constante diepte. Er blijken inderdaad oplossingen in de vorm van voortlopende golven te bestaan. Heeft de vloeistofmassa een grote diepte, (groot t.o.v. de golflengte van de gravitatiegolven), wat we steeds aannemen, dan blijkt bij deze golven dispersie op te treden.

Ten aanzien van de eenduidigheid wordt in § 4 bewezen, dat met behulp van gestelde eisen op oneindig, het karakter van een reguliere oplossing van het eerste voorbeeld is vastgelegd, en wel dat deze oplossing de gedaante heeft:

$$\varphi(x,y) = A e^{ky} \cos(kx + \alpha) \text{ met } A \text{ en } \alpha \text{ willekeurig reeel,} \quad (3)$$

Een analoge stelling geldt voor het tweede voorbeeld.

Een overzicht van de optredende problemen wordt gegeven in § 5, terwijl de voornaamste oplossingsmethoden in het kort worden aangeduid in § 6. Het eigenlijke literatuuroverzicht is vervat in § 7, systematisch gerangschikt naar de problemen, en voor ieder probleem in chronologische volgorde. Aan het slot worden enige publicaties genoemd, die feitelijk buiten de in dit rapport gegeven opzet vallen, doch wel nauw verwante problemen behandelen. § 8 en § 9 tenslotte geven ieder een voorbeeld van de oplossing van een probleem ter illustratie van de twee belangrijkste oplossingsmethoden.

## § 1. De theorie van zwaartekrachtgolven van kleine amplitude.<sup>1)</sup>

Beschouw een incompressibele vloeistof zonder inwendige wrijving in een kanaal met evenwijdige verticale wanden, waarin we dwarsstromingen verwaarlozen, zodat de beweging tweedimensionaal is. We leggen een Cartesisch coördinatenstelsel met de oorsprong in het oorspronkelijk ongestoorde wateroppervlak, en wel de x-as in de lengterichting van het kanaal langs het oppervlak, en de y-as loodrecht naar boven.

-----  
1) Zie bijv. Lamb [28] of Milne-Thompson [31].



De bewegingsvergelijkingen worden gegeven door de vergelijkingen van Euler en de continuïteitsvergelijking:

$$\text{Euler} \begin{cases} u_t + u u_x + v u_y = X - \frac{1}{\rho} p_x \\ v_t + u v_x + v v_y = Y - \frac{1}{\rho} p_y \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\text{Continuïteitsvergelijking} \quad u_x + v_y = 0 \quad (1.2).$$

Hierin zijn:  $u$  en  $v$  de  $x$ -, respectievelijk  $y$ -component van de stroomsnelheid;  $\rho$  is de (constant veronderstelde) dichtheid;  $X$  en  $Y$  zijn de componenten van de uitwendige krachten per massa-eenheid;  $p$  is de overdruk t.o.v. de atmosferische druk aan de oppervlakte (deze laatste wordt constant aangenomen);  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en  $t$  als index duiden partiële differentiaties aan.

Wanneer we aannemen, dat de vloeistofbeweging rotatievrij is, volgt daaruit het bestaan van een snelheidspotentiaal :

$$u = -\bar{\Phi}_x, \quad v = -\bar{\Phi}_y \quad (1.3)$$

Geldt bovendien dat ook de uitwendige krachten een potentiaal hebben:  $X = -\Omega_x$ ,  $Y = -\Omega_y$ , dan wordt een integraal van (1.1) gegeven door de stelling van Bernouilli:

$$\frac{p}{\rho} = \bar{\Phi}_t - \Omega - \frac{1}{2} (\bar{\Phi}_x^2 + \bar{\Phi}_y^2) + F(t) \quad (1.4)$$

waarin  $F$  een willekeurige functie is van  $t$ .

(1.2) en (1.3) leveren tezamen, dat  $\bar{\Phi}$  voldoet aan de differentiaalvergelijking van Laplace:

$$\bar{\Phi}_{xx} + \bar{\Phi}_{yy} = 0 \quad (1.5)$$

N.B.: Aangezien we niet-stationaire bewegingen zullen beschouwen, hangt  $\bar{\Phi}$  ook af van  $t$ :  $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(x, y; t)$ .

We gaan er nu van uit, dat de gravitatie de enige uitwendige kracht is, dus:

$$\Omega = gy.$$

Deze theorie wordt derhalve beheersd door de potentiaalvergelijking (1.5), waaraan we randvoorwaarden zullen moeten toevoegen, gebruikmakend van (1.4) en (1.6).

Wanneer we veronderstellen dat de watermassa niet meer in de ongestoorde toestand verkeert, kunnen we de vergelijking van het vrije vloeistofoppervlak geven door  $y = \eta(x, t)$ .

Op fysische gronden eisen we nu aan de randen:

1°. aan een vrij oppervlak:

(a) de druk is gelijk aan de atmosferische druk, m.a.w.  $p = 0$ ,

(b) een vloeistofdeeltje dat aan de oppervlakte is, blijft aan



de oppervlakte (dit volgt ook noodzakelijk uit de vergelijkingen, aangezien we zg. "continue bewegingen" beschouwen, zie bv. Lamb [29], p.7).

2<sup>o</sup>. aan een vaste begrenzing van de vloeistof:

(c) de snelheidscomponent loodrecht op de begrenzing is 0.

Mathematisch geformuleerd, houden deze eisen in:

(a) levert met (1.4) en (1.6):

$$\text{voor } y = \eta(x,t) \text{ geldt: } \frac{1}{2} (\bar{\Phi}_x^2 + \bar{\Phi}_y^2) = \bar{\Phi}_t - g\eta \quad (1.7)$$

(de willekeurige functie van t uit (1.4) nemen we op in  $\bar{\Phi}$ ).

Voor een deeltje aan de oppervlakte geldt met (b):  $d\eta = \eta_x dx + \eta_t dt$ , terwijl  $d\eta = v dt = -\bar{\Phi}_y dt$  en  $dx = u dt = -\bar{\Phi}_x dt$  dus uit eis (b) volgt:

$$\text{voor } y = \eta(x,t) \text{ geldt: } \bar{\Phi}_y = \eta_x \bar{\Phi}_x - \eta_t \quad (1.8)$$

(1.7) en (1.8) geven tezamen een (niet-lineaire) randvoorwaarde aan een vrij oppervlak.

Uit (c) volgt direct de randvoorwaarde aan een vaste wand:

$$\bar{\Phi}_n = 0 \quad (1.9)$$

Bij wat men noemt de exakte lineaire theorie der gravitatiegolven van kleine amplitude lineariseren we de randvoorwaarde aan een vrij oppervlak door te veronderstellen, dat de bewegingen "infinitesimaal" zijn, en dat derhalve niet-lineaire termen in de snelheden  $\bar{\Phi}_x$  en  $\bar{\Phi}_y$  en in de verticale verplaatsing  $\eta$  en de afgeleiden daarvan verwaarloosbaar klein zijn t.o.v. deze grootheden zelf.

(1.7) en (1.8) gaan dan respectievelijk over in:

$$\bar{\Phi}_t = g\eta \quad (1.10) \quad \text{en} \quad \bar{\Phi}_y = -\eta_t \quad (1.11)$$

terwijl in deze lineaire theorie deze voorwaarden voor  $\bar{\Phi}$  gelden voor het argument  $y = 0$  i.p.v.  $y = \eta$ , (door ontwikkeling:  $\bar{\Phi}(x, \eta) = \bar{\Phi}(x, 0) + \eta \bar{\Phi}_y(x, 0) + \dots \approx \bar{\Phi}(x, 0)$ ), zodat combinatie van (1.10) en (1.11) tenslotte als randvoorwaarde aan een vrij oppervlak levert:

$$\text{voor } y = 0 \text{ geldt: } \bar{\Phi}_{tt} + g \bar{\Phi}_y = 0 \quad (1.12)$$

Is de functie  $\bar{\Phi}(x, y; t)$  opgelost met behulp van (1.5) en de randvoorwaarden (1.9) en (1.12), dan vinden we hieruit de verticale verplaatsing met (1.10):

$$\eta = \frac{1}{g} \bar{\Phi}_t \Big|_{y=0} \quad (1.13)$$



Bij de toepassing van de thans gegeven theorie op praktische problemen, komen ook gevallen voor, waarin het probleem niet als tweedimensionaal kan worden beschouwd. De z-as ligt dan langs het ongestoorde oppervlak loodrecht op de x-as. Uit het voorgaande is eenvoudig in te zien dat in dat geval  $\Phi(x,y,z;t)$  voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \quad (1.14)$$

terwijl de randvoorwaarden hetzelfde blijven, en dus nog gegeven worden door (1.12) en (1.9).

Wat de afhankelijkheid van z betreft, beperken we ons tot eenvoudig harmonische bewegingen, zodat:  $\Phi_{zz} + m^2 \Phi = 0$  (m reeel) (1.15)  
In dat geval voldoet  $\Phi$  dus aan:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} - m^2 \Phi = 0 \quad (1.16)$$

## § 2. Periodieke oplossingen; eenduidigheid van oplossingen; oplossingen in de vorm van voortlopende golven.

We interesseren ons uitsluitend voor bewegingen die periodiek zijn in de tijd, en stellen daarom:  $\Phi(x,y;t) = \varphi(x,y) \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix}$  (2.1)  
( $\omega$  reeel).

Voor  $\varphi(x,y)$  krijgen we dan het volgende randprobleem:

$$\text{Diff.Verg.} \quad : \text{2-dimensionaal: } \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (2.2)$$

$$\quad \quad \quad : \text{3-dimensionaal: } \varphi_{xx} + \varphi_{yy} - m^2 \varphi = 0 \quad (2.3)$$

met randvoorwaarden: (in beide gevallen)

$$\text{aan een vrij oppervlak: } \varphi_y = k \varphi \quad (2.4)$$

$$\text{aan een vaste wand} \quad : \varphi_n = 0 \quad (2.5)$$

In (2.4) is  $k = \frac{\omega^2}{g}$  (2.6), dus k is een positieve reële constante.

De in (2.2) tot en met (2.5) geformuleerde randproblemen zijn lineair en homogeen, terwijl ook de randvoorwaarden homogeen zijn. Het standaarduitleidsbewijs voor dergelijke problemen met een randvoorwaarde van de derde soort (zoals (2.4)) is echter niet geldig, omdat dit berust op het feit dat  $k < 0$  moet zijn, terwijl in ons geval juist  $k > 0$  is. Vandaar dat deze problemen ook niet-triviale oplossingen bezitten, en dus niet eenduidig een oplossing bepalen. We zullen daarom nog extra eisen aan  $\varphi$  opleggen, en wel in de eerste plaats de volgende:

$\varphi(x,y)$  en de afgeleiden  $\varphi_x$  en  $\varphi_y$  zijn in het oneindige uniform begrensd. (We beschouwen steeds gebieden, die zich tot in het onein-



dige . uitstrekken). Dit is fysisch zeer plausibel, immers volgens (1.3), (1.13) en (2.1) betekent dit, dat de snelheid en de verticale verplaatsing in het oneindige uniform begrensd zijn.

Verder ligt het voor de hand, dat we steeds zouden moeten eisen, dat  $\varphi(x,y)$  overal regulier is. Bij de praktische problemen, waarbij we zullen proberen voor  $\Phi$  oplossingen te vinden in de vorm van voortlopende golven, zal dit echter niet steeds mogelijk zijn, zodat we een concessie zullen moeten doen aan de oorspronkelijke veronderstelling van infinitesimale bewegingen. We komen hier nader op terug.

Eisen we wel, dat  $\varphi(x,y)$  overal regulier is, dan blijkt steeds dat de gedaante van  $\varphi(x,y)$  en inzonderheid het gedrag voor  $y = 0$ ,  $x \rightarrow \infty$  is vastgelegd. Een algemeen bewijs hiervan is echter (nog) niet gegeven, wel voor speciale gevallen. (Zie de twee voorbeelden, die worden behandeld in § 3).

Zoals hierboven reeds aangekondigd, gaat het ons er om voor  $\Phi$  oplossingen te vinden in de vorm van voortlopende golven. (2.1) laat zien, dat oplossingen voor  $\varphi$  ons oplossingen  $\Phi$  leveren in de vorm van staande golven. Door superpositie van 2 staande golven, zullen wij dan trachten voortlopende golven te construeren. (Dit is enigszins afwijkend van de gebruikelijke theorie van golfverschijnselen, waarin men meestal een staande golf beschouwt als superpositie van twee voortlopende).

In § 3 zal dit aan de twee eenvoudigste gevallen, waarin we bovenstaande theorie kunnen toepassen, worden toegelicht. Bij de praktische gevallen, waarbij het gebied waar de vloeistof zich uitstrekt, ingewikkelder is, blijkt het echter pas mogelijk voortlopende golven te construeren, wanneer we voor  $\varphi$  ook een oplossing toestaan met een logaritmische singulariteit.

§ 8 en § 9 geven hiervan voorbeelden. Een opmerking over de tegenstrijdigheid hiervan met de oorspronkelijke veronderstellingen, wordt gemaakt aan het eind van § 8. Verder zal het slechts bij de twee in § 3 gegeven voorbeelden gelukken, een oplossing te geven die voor alle  $x$  de gedaante heeft van een voortlopende golf, terwijl bij alle overige gevallen wordt volstaan met een oplossing die zich op oneindig gedraagt als een voortlopende golf, die men construeert door superpositie van twee oplossingen voor  $\varphi$ , die voor  $x \rightarrow +\infty$  zich gedragen als  $\cos x$ , resp.  $\sin x$ .



### § 3. Twee eenvoudige voorbeelden.

#### I. Oneindig diep kanaal.

In dit geval treedt randvoorwaarde (2.5) niet op; we vervangen deze door de eis, dat  $\varphi_y \rightarrow 0$  als  $y \rightarrow -\infty$ , en we hebben dus het volgende potentiaalprobleem:

$$\Delta \varphi = 0 \text{ voor } \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y \leq 0 \end{cases}$$

met randvoorwaarden:  $y = 0 : \varphi_y = k \varphi \quad (k > 0)$   
 $y \rightarrow -\infty : \varphi_y \rightarrow 0$

en als extra eis: voor  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  zijn  $\varphi$ ,  $\varphi_x$  en  $\varphi_y$  uniform begrensd.

Het is eenvoudig in te zien dat aan deze eisen voldaan wordt door de functies:  $\varphi(x, y) = A e^{ky} \cos(kx + \alpha)$  (3.1)  
 met willekeurige (reële)  $A$  en  $\alpha$ , en (3.1) geeft dus volgens (2.1) inderdaad staande golven voor  $\Phi(x, y; t)$ .

In § 5 zullen we, in navolging van Stoker [39] aantonen, dat de oplossingen (3.1) de enige overal in het gebied reguliere en op oneindig begrensde oplossingen zijn.

Door lineaire combinatie vinden we met (2.1) dat we voor  $\Phi(x, y; t)$  als oplossingen kunnen nemen:

$$\Phi(x, y; t) = A e^{ky} \cos(kx + \omega t + \alpha) . \quad (3.2)$$

Dit is dus de oplossing in de gewenste vorm, nl. een vlakke voortlopende golf.

De golflengte  $\lambda$  wordt gegeven door  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  en met (2.6) dus:

$$\lambda = \frac{2\pi g}{\omega^2} . \quad (3.3)$$

De trillingstijd  $T$  is  $\frac{2\pi}{\omega}$  en voor de voortplantingssnelheid  $c$  vinden we

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{g}{\omega} , \text{ dus volgens (3.3):}$$

$$c = \left( \frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

De voortplantingssnelheid is derhalve niet onafhankelijk van de golflengte, maar is evenredig met  $\sqrt{\lambda}$ . Bij deze golven treedt dus dispersie op.

#### II. Kanaal met eindige, constante diepte $h$ .

Het potentiaalprobleem luidt hier:  $\Delta \varphi = 0$  voor  $\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -h \leq y \leq 0 \end{cases}$

$$\text{met: } y = 0 : \quad \varphi_y = k \varphi$$

$$y = -h : \quad \varphi_y = 0$$



terwijl voor  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ :  $\varphi$ ,  $\varphi_x$  en  $\varphi_y$  uniform begrensd.

Weinstein [43] toont aan, dat de enige overal reguliere oplossingen worden gegeven door

$$\varphi(x, y) = A \left\{ \cos(lx + \alpha) + \sin(lx + \alpha) \right\} \cdot \text{ch } l(y+h) \text{ met willekeurige } A \text{ en } \alpha \quad (3.5)$$

waarin  $l$  de positieve wortel is van de vergelijking:

$$l \text{ th } lh = k (= \frac{\omega^2}{g}) \quad (3.6)$$

We leveren dit bewijs niet, maar poneren de door (3.5) en (3.6) gegeven oplossing. Verificatie is eenvoudig.

Dit levert ons als voortlopende golf-oplossingen voor  $\Phi(x, y; t)$ :

$$\Phi(x, y; t) = A \text{ ch } l(y+h) \cdot \cos(lx + \omega t + \alpha) \quad (3.7)$$

tezamen met (3.6)

Met (2.6) en (3.6) zien we dat nu voor de voortplantingssnelheid geldt:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{l} = \left( \frac{g}{l} \text{ th } lh \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{g \lambda}{2 \pi} \text{ th } \frac{2 \pi h}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Ten aanzien van (3.8) kunnen we opmerken: voor  $\lambda < 2h$ , is  $\text{th } \frac{2 \pi h}{\lambda} \approx 1$ , dus in dat geval is  $c \approx \left( \frac{g \lambda}{2 \pi} \right)^{\frac{1}{2}}$ , juist als in (3.4).

M.a.w.: is het kanaal dieper dan de halve golflengte, dan is de voortplantingssnelheid nagenoeg hetzelfde als wanneer het kanaal oneindig diep was. Dit geval zullen we steeds beschouwen.

Geldt daarentegen  $\lambda \gg h$ , dan is  $\text{th } \frac{2 \pi h}{\lambda} \approx \frac{2 \pi h}{\lambda}$  dus:  $c \approx \sqrt{gh}$ , d.w.z.: de voortplantingssnelheid hangt niet meer af van de golflengte. Met deze voortplantingssnelheid heeft men te maken bij de zg. "shallow-water theory" (zie bv. Stoker [39]) en bij de theorie van lange oceaangolven.

#### § 4. Bewijs van de eenduidigheid van de oplossing van het eerste voorbeeld in paragraaf 3.

We bewijzen de volgende

Stelling: Is  $\varphi(x, y)$  een reguliere potentiaalfunctie in het halve vlak  $y \leq 0$ , die voldoet aan  $\varphi_y = k \varphi$  ( $k > 0$ ) voor  $y = 0$ , en zijn verder de functie  $\varphi$  en de eerste afgeleiden  $\varphi_x$  en  $\varphi_y$  uniform in  $x$  en  $y$  begrensd als  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ , dan geldt:

$\varphi(x, y) \equiv A e^{ky} \cos(kx + \alpha)$  met willekeurige reële  $A$  en  $\alpha$ . (Dus  $\varphi \equiv 0$  of van de gedaante (3.1) met  $A \neq 0$ ).



Het bewijs leveren we langs functietheoretische weg. Omdat we te maken hebben met een potentiaalprobleem, "vertalen" we het probleem voor  $\varphi$  in het reële  $(x,y)$ -vlak in een probleem voor een analytische functie in het complexe  $z = x + iy$ -vlak.

We voeren in de analytische functie  $f(z)$ , waarvan  $\varphi(x,y)$  het reële deel is:  $\varphi = \operatorname{Re} f(z)$ . Om aan de eisen voor  $\varphi$  te voldoen moet  $f(z)$  regulier zijn overal in het halve vlak  $\operatorname{Im} z \leq 0$ , en voor  $\operatorname{Im} z = 0$  voldoen aan:

$$\operatorname{Re}(iD-k).f(z) = 0 \quad (\text{operator } D \text{ betekent differentiatie naar } z). \quad (4.1)$$

Immers: volgens Cauchy-Riemann is  $\frac{df}{dz} = \varphi_x - i\varphi_y$  dus  $\operatorname{Re}(iD-k).f(z) = \varphi_y - k\varphi$ , zodat (4.1) inderdaad equivalent is met de voorwaarde voor  $\varphi$  aan het vrije oppervlak.

Verder is  $\left|\frac{df}{dz}\right| \leq |\varphi_x| + |\varphi_y|$  dus uit de eisen voor  $\varphi_x$  en  $\varphi_y$  op  $\infty$  volgt, dat ook  $\frac{df}{dz}$  uniform begrensd is voor  $|z| \rightarrow \infty$  in het onderste halve vlak.<sup>2)</sup> Hieruit volgt:

$$|f(z)| < M_1 \cdot |z| \quad \text{voor voldoende grote } |z|. \quad (M_1 \text{ pos.const.}) \quad (4.2)$$

We definiëren nu voor  $\operatorname{Im} z \leq 0$  de analytische functie  $F(z)$  met behulp van

$$F(z) = (iD-k).f(z) \quad (4.3)$$

Dan is  $F(z)$  natuurlijk ook regulier in dit halve vlak, maar volgens (4.1) is  $\operatorname{Re} F(z) = 0$  voor  $z$  reëel. Dientengevolge kunnen we  $F(z)$  door spiegeling voortzetten in het gehele complexe vlak, zodat  $F(z)$  dan overal regulier is, terwijl grenzen voor  $|F(z)|$  in het onderste halve vlak ook gelden in het bovenste. Daarom volgt uit (4.2) en (4.3) dat in het gehele  $z$ -vlak geldt:  $|F(z)| < M_2 \cdot |z|$  voor alle voldoende grote  $z$ . ( $M_2$  pos.const.).

Bekijken we nu de functie  $\frac{F(z)-F(0)}{z}$ , dan is deze ook overal regulier en bovendien op  $\infty$  begrensd, zodat dit volgens de Stelling van Liouville een constante is. We vinden dus, dat  $F(z)$  van de gedaante is:

$$F(z) = c_1 z + c_2.$$

Met (4.3) volgt hieruit na integratie:

$$f(z) = A e^{-ikz} + Bz + C \quad (\text{met } A, B, C \text{ (complexe) constanten}) \quad (4.4)$$

Omdat echter  $\varphi = \operatorname{Re} f(z)$  uniform begrensd moet zijn voor  $|z| \rightarrow \infty$  in het onderste halve vlak, moet  $B = 0$  zijn. ( $Ae^{-ikz}$  is in dit halve vlak uniform begrensd omdat  $k > 0$ ).

-----  
2) Uit de eis voor  $\varphi$  op  $\infty$  volgt meer omtrent het gedrag van  $\frac{df}{dz}$  voor grote  $|z|$ . We hebben dat hier echter niet nodig, maar verwijzen naar het Lemma in § 8 op pag. 23).



Verder moet  $C$  zuiver imaginair zijn volgens (4.1), zodat:

$$f(z) = A e^{-1kz} + i C_1 \quad (4.5)$$

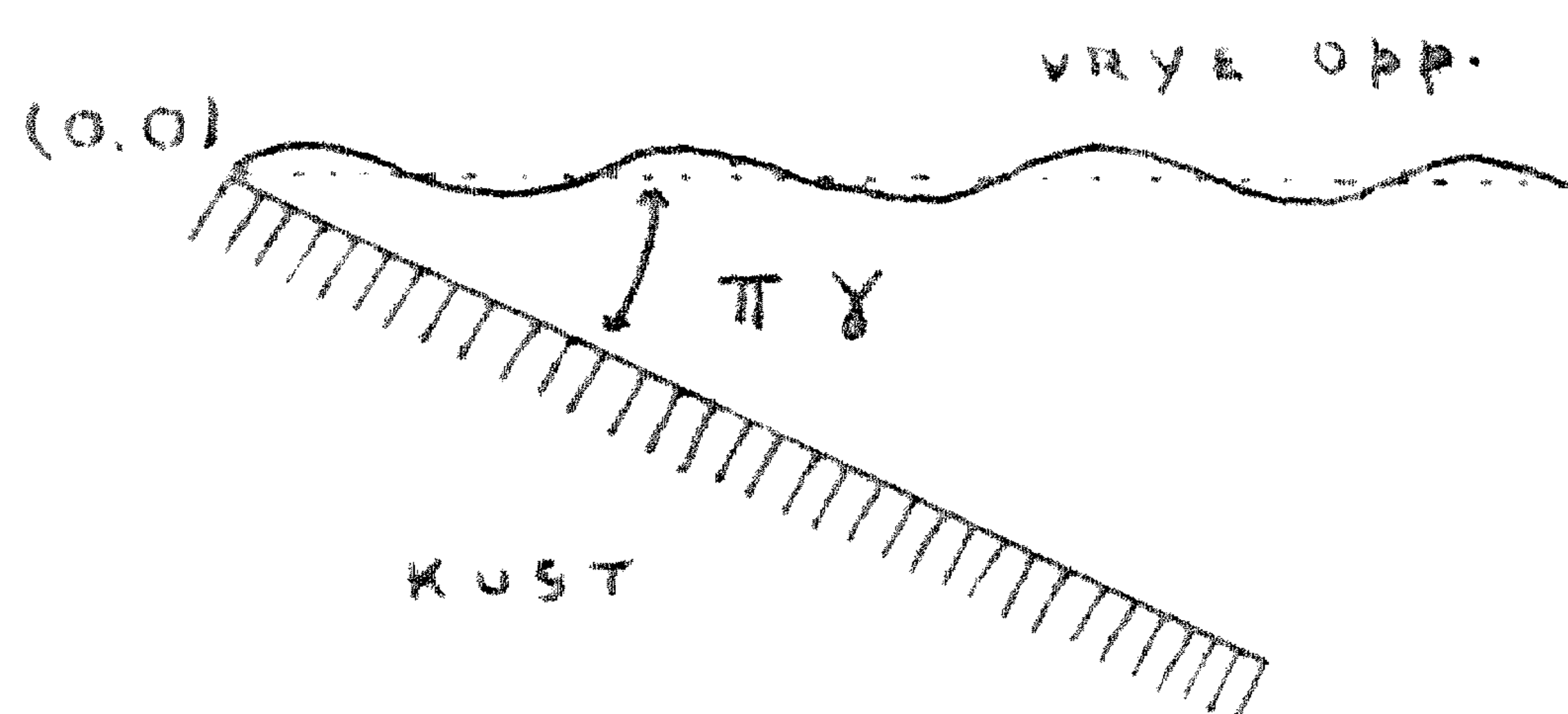
met  $A$  willekeurig complex, en  $C_1$  willekeurig reële constante.

$\phi(x, y) = \text{Re } f(z)$  heeft dus inderdaad de in de stelling genoemde gedaante.

## § 5. Overzicht van de verschillende problemen; een opmerking betreffende twee- en driedimensionale problemen.

Naast de twee eenvoudige voorbeelden van § 3, waarvoor Airy [1] reeds voortlopende golf-oplossingen vond, zijn na 1940 verscheidene andere problemen onderzocht, waarvan verschillende praktische betekenis hadden. Bij de onder 1° tot en met 3° genoemde geldt steeds voor  $y = 0$  de voorwaarde (2.4) aan het vrije oppervlak, terwijl we bij 4° te maken zullen krijgen met een ander type voorwaarde aan het vrije oppervlak.

### 1°. Uniform hellende bodem.



We nemen hierbij aan dat een constante bodemhelling bestaat, zodat de voorwaarde aan een vaste wand geldt voor

$$y = - \text{tg } \pi \gamma \cdot x \quad (\pi \gamma \text{ gemeten als in de figuur}).$$

In het geval  $\gamma = \frac{1}{2}$  spreekt men van een rechte klip, voor  $\frac{1}{2} < \gamma < 1$  van een overhangende klip.

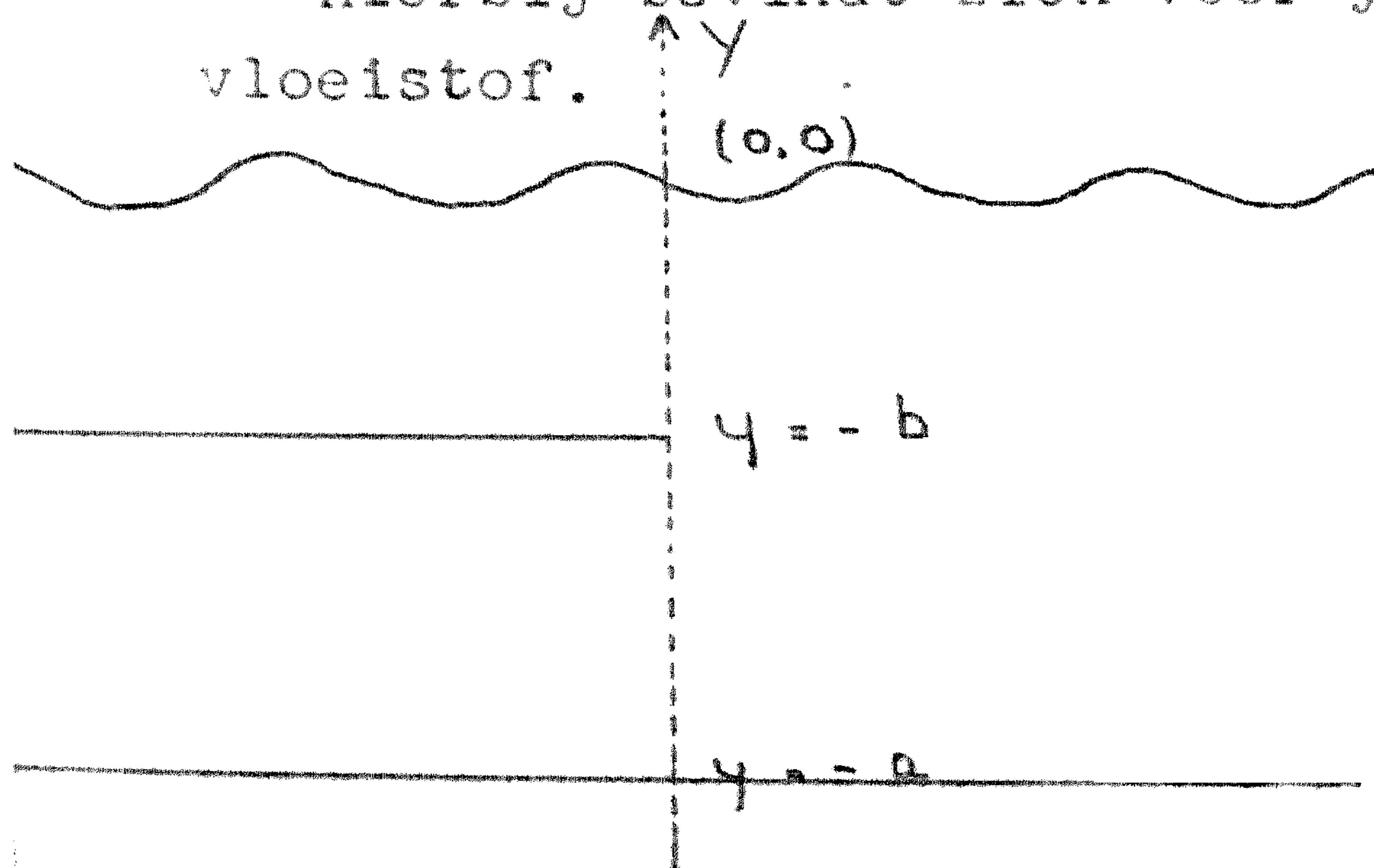
Voor  $\gamma = 1$  tenslotte van een dokprobleem. (D.w.z. een half vlak van het wateroppervlak is bedekt met een vaste wand).

### 2°. Vlakke barrières.

Hierbij neemt men aan dat zich in de vloeistof vlakke barrières bevinden van "infinitesimale" dikte. We onderscheiden:

#### A. Horizontale vlakke barrières.

Hierbij bevindt zich voor  $y = -b$ ,  $x < 0$  een "vaste wand" in de vloeistof.



$$(0 \leq b < a)$$

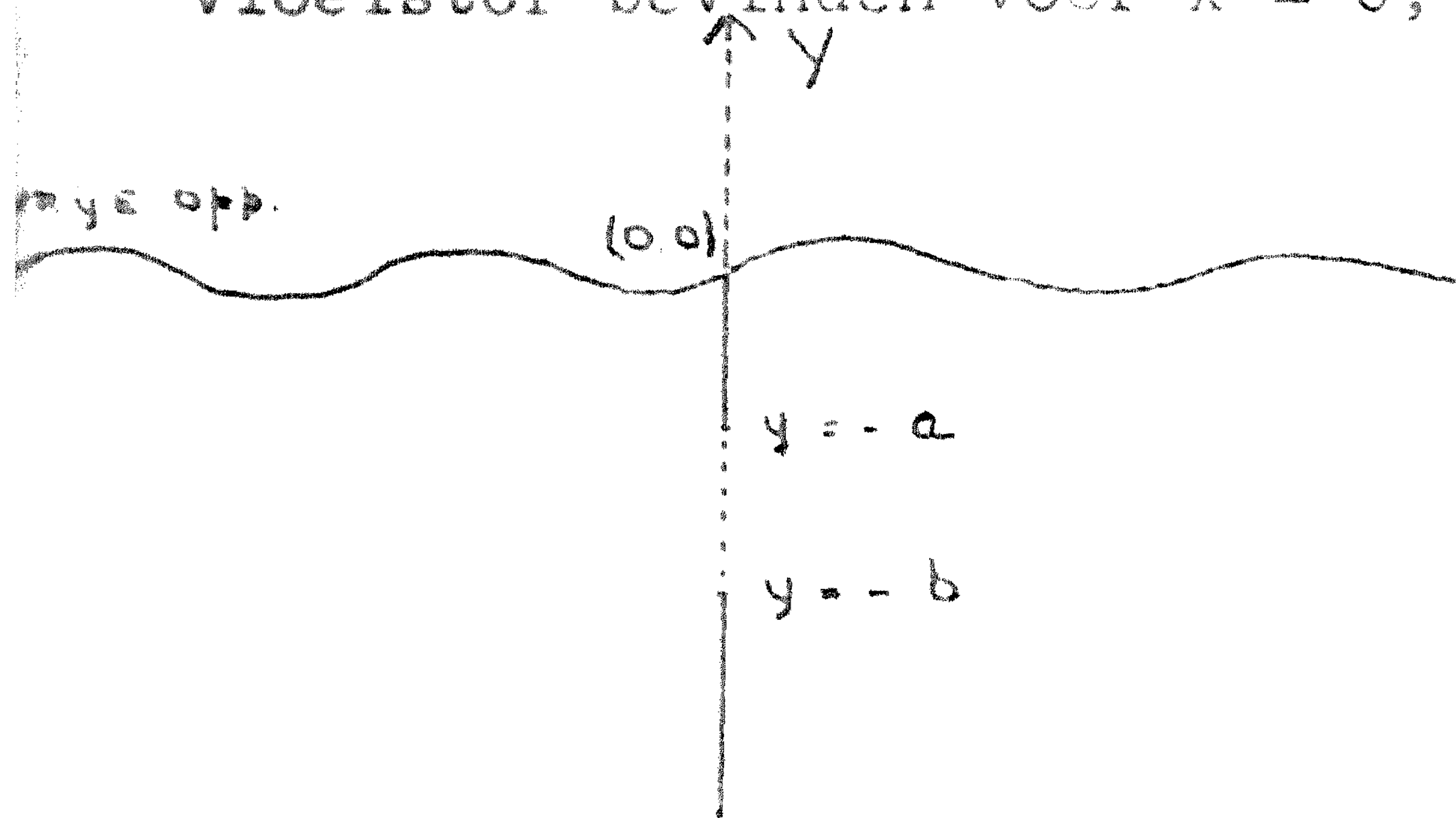
Voor  $b = 0$  krijgen we weer een dokprobleem.

$a$  mag eindig (eindig diep kanaal) of  $\infty$  (kanaal met oneindige diepte) zijn.



## B. Verticale vlakke barrières.

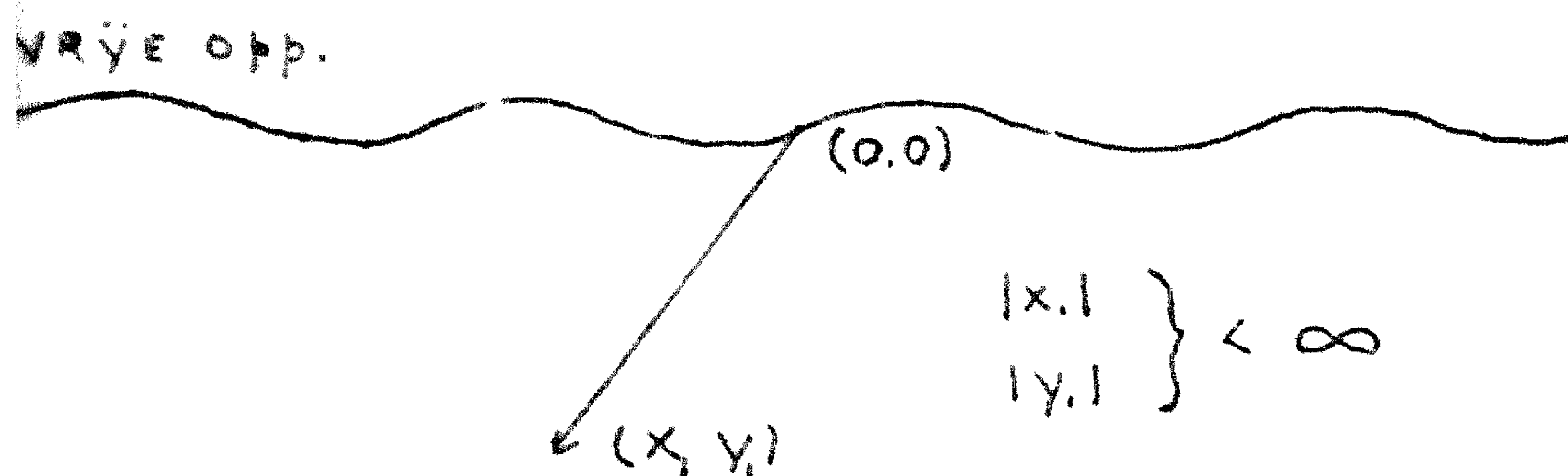
Als algemeen geval nemen we aan dat zich "vaste wanden" in de vloeistof bevinden voor  $x = 0$ ,  $0 \geq y \geq -a$  en voor  $x = 0$ ,  $-b \leq y < -\infty$ .



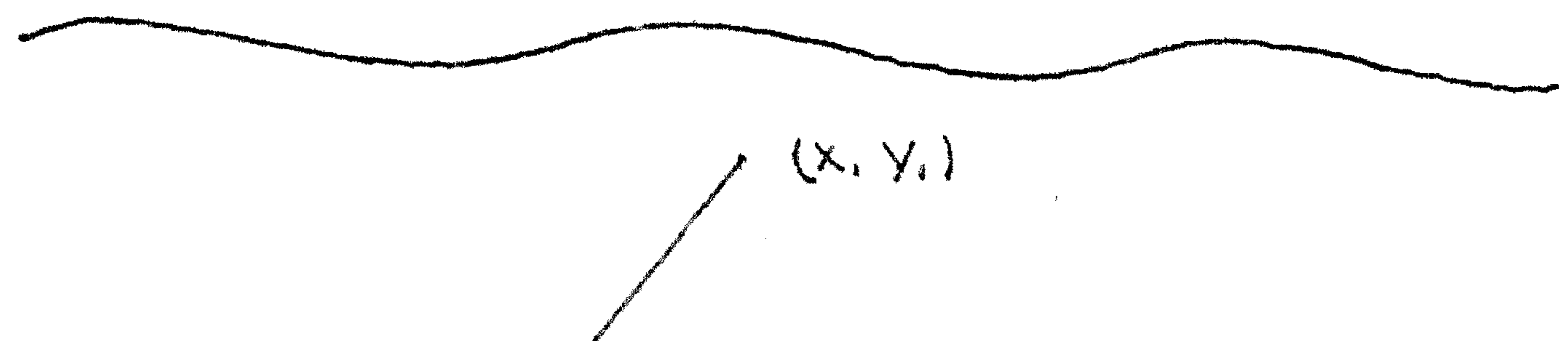
De vloeistof wordt bij deze problemen oneindig diep verondersteld. Speciale gevallen krijgen we voor:  
 $a < \infty$ ,  $b = \infty$ : een vaste wand vanaf het oppervlak tot eindige diepte.  
 $a = 0$ ,  $0 < b < \infty$ : een vaste wand vanaf de bodem tot onder het oppervlak. Hierbij kan men nog het speciale geval beschouwen dat  $b \downarrow 0$ .

## C. Scheefstaande vlakke barriere.

Hierbij nemen we aan dat zich in een kanaal met oneindige diepte een "vaste wand" bevindt vanaf het oppervlak tot eindige diepte onder een hoek tussen 0 en  $\frac{\pi}{2}$  of vanaf de "bodem" tot een eindige diepte



onder het oppervlak onder een hoek tussen 0 en  $\frac{\pi}{2}$ .



## 3°. Barrières van andere vorm.

Er zijn ook enige publicaties verschenen, waarin zich onder het wateroppervlak een hindernis van cilindrische vorm bevindt.

## 4°. Ander type voorwaarde aan het vrije oppervlak.

Een speciale plaats nemen de problemen in, waarbij sprake is van een zg. "floating mat"-voorwaarde aan het vrije oppervlak. We veronderstellen hierbij dat een half vlak van de oppervlakte van een watermassa met grote diepte is bedekt met een drijvende dunne laag. Deze laag kan als eerste benadering worden beschouwd voor een veld van gebroken ijs, of een ander veld van drijvend materiaal dat bestaat uit kleine deeltjes zonder wisselwerking. Men heeft in dit halve vlak te maken met een andere randvoorwaarde voor  $y = 0$ , die we hier zullen afleiden:

Volgens (1.4) en (1.6) geldt na de toegepaste linearisatie voor de druk aan het oppervlak:

$$p = \rho \Phi_t - \rho g \eta \quad (5.1)$$

We hebben verondersteld, dat de drijvende deeltjes geen wisselwerking hebben, en nemen daarom aan, dat de enige werkende krachten afkomstig zijn van de zwaartekracht en van de druk van het water onder de



laag.

Dan geldt aan het oppervlak ook:

$$p = \rho_1 \eta_{tt} \quad (5.2)$$

waarin  $\rho_1$  de dichtheid van de deeltjes per oppervlakte-eenheid is.

We elimineren nu  $p$  en  $\eta$  uit (5.1), (5.2) en (1.11), wat oplevert:

$$\text{voor } y = 0 \text{ geldt: } \rho \Phi_{tt} + \rho g \Phi_y = -\rho_1 \Phi_{ytt} \quad (5.3)$$

Volgens de definitie van  $\varphi(x,y)$  in (2.1) volgt hieruit:

$$\text{voor } y = 0: \quad -\rho \omega^2 \varphi + \rho g \varphi_y = \rho_1 \omega^2 \varphi_y$$

zodat we tenslotte verkrijgen als

randvoorwaarde aan een "vrij oppervlak" in geval van een "floating mat":

$$\varphi_y = k_1 \varphi \quad (5.4)$$

$$\text{waarin: } k_1 = \frac{\rho \omega^2}{\rho g - \rho_1 \omega^2} = \frac{\rho k}{\rho - \rho_1 k} \quad (5.5) \text{ volgens (2.6).}$$

De randvoorwaarde is dus wel van hetzelfde type, maar verschilt toch essentieel van (2.4) in het feit, dat  $k_1$  geen vast teken heeft, terwijl  $k$  steeds  $> 0$  is.

Bij de onder  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  en  $4^\circ$  beschreven problemen kunnen we te maken hebben met 2-, zowel als met 3-dimensionale problemen afhankelijk van de richting van waaruit de voortlopende golven uit het oneindige komen. Staan de lijnen, die punten van constante phase verbinden (zoals de golfkruinen bijv.) loodrecht op de x-richting, dan is het probleem tweedimensionaal, daar we de coördinaatassen steeds zo leggen, dat de kustlijn of de rand van een barriere in een vlak  $y = 0$  of  $y = \text{constant}$  liggen, en loodrecht op de x-as staan. Maken de golfkruinen een andere hoek met de x-richting dan is het probleem driedimensionaal. Volgens (1.15) beperken we ons tot enkelvoudig harmonische z-afhankelijkheid, wat betekent (daar we ook voor x oplossingen zoeken die zich voor grote x gedragen als  $\sin x$  en  $\cos x$ ) dat onze oplossingen zich voor grote  $x^2 + z^2$  gedragen als  $e^{i(lx + mz)}$ , d.w.z. we proberen oplossingen te vinden die zich op  $\infty$  gedragen als een vlakke voortlopende golf, waarvan de voortplantingsrichting een zekere hoek maakt met de x-richting.

Het ligt enigszins voor de hand om te veronderstellen, dat het het eenvoudigste is, alle gevallen driedimensionaal op te lossen en dan de oplossingen voor tweedimensionale problemen te verkrijgen door  $m = 0$  te nemen. (Zie (2.2) en (2.3)). Dit is echter om twee redenen niet geheel juist. In de eerste plaats is gebleken in § 2 dat tweedimensionale problemen aanleiding geven tot potentiaalproblemen voor  $\varphi(x,y)$ , (terwijl driedimensionale problemen leiden tot



de golfvergelijking). Voor de oplossing hiervan heeft men een machtig hulpmiddel in de functietheorie. Men kan  $\varphi(x,y)$  beschouwen als het reële deel van een analytische functie en de randvoorwaarden omzetten in voorwaarden voor die analytische functie op de rand van het gebied (zoals bv. in § 4 is gebeurd). Deze wijze van oplossen is dikwijls aanzienlijk eenvoudiger dan voor een driedimensionaal probleem.

In de tweede plaats is gebleken, dat men in de oplossing van een driedimensionaal probleem veelal niet zonder meer  $m = 0$  kan nemen, doch dat men op subtiële wijze  $m$  naar 0 moet laten naderen. We gaan op dit verschil tussen twee- en driedimensionale gevallen hier niet nader in, maar verwijzen naar de literatuur, bv. § 6 in Heins [18].

## § 6. Overzicht van de voornaamste oplosmethoden.

Iedere publicatie, waarin een der in de vorige paragraaf genoemde gevallen wordt opgelost, heeft natuurlijk zijn eigen aantrekkelijke spitsvondigheden, zonder dat de gevolgde wijze van oplossen veelal kan worden gekenschetst als een oplosmethode voor een zekere groep van problemen betreffende gravitatiegolven.

We zullen hieronder dan ook alleen de voornaamste oplosmethoden in het kort schetsen, die zich wat betreft hun bruikbaarheid niet beperken tot één geval. De onder 1. en 2. genoemde methoden worden geïllustreerd door de voorbeelden van § 8 en § 9.

### 1. De reductiemethode.

Deze methode is afkomstig van Lewy en Stoker en voornamelijk bruikbaar voor de in § 5 onder 1<sup>o</sup>. genoemde problemen. Ze berust op de aanname van een nieuwe onbekende functie  $\chi$  die voldoet aan een homogene randvoorwaarde van de eerste soort op de gehele rand van het gebied. ( $\chi = 0$ ). Men reduceert dus het randprobleem tot een met eenvoudiger randvoorwaarden. Is deze functie opgelost, dan moet nog een partiele (in tweedimensionale gevallen een gewone) differentiaalvergelijking worden opgelost teneinde  $\varphi$  te vinden.

Vooraf bij functietheoretische oplossing van tweedimensionale problemen heeft deze oplosmethode waarde. We illustreren deze methode m.b.v. het tweedimensionale geval van een rechte klip in § 8.

### 2. De methode van Heins.

Deze methode wordt ook wel aangeduid als de methode met behulp van integraalvergelijkingen. Daar zij echter is ontworpen door Heins en speciaal door hem met vrucht is toegepast op verscheidene gevallen, lijkt bovenstaande titel gerechtvaardigd. Voor de gevallen onder



1<sup>o</sup> genoemd in § 5 is ze niet te gebruiken, wel echter voor alle onder 2<sup>o</sup> genoemde, terwijl ze ook bij de onder 4<sup>o</sup> genoemde problemen van nut is. Of het probleem van twee- of van driedimensionale aard is, maakt geen essentieel verschil.

Het principe berust op de constructie van een Greense functie voor het randprobleem. Met behulp van deze functie verkrijgt men een integraalvergelijking voor de functie  $\varphi(x,y)$  die van het Wiener-Hopf type blijkt te zijn, en met behulp van de daarvoor beschikbare theorie (zie bv. [32]) kan worden opgelost. Deze methode laat zich slechts goed beschrijven aan de hand van een voorbeeld, en wordt in § 9 geïllustreerd m.b.v. het driedimensionale geval van een kanaal van eindige diepte met een dok, waarvan we de oplossing gedeeltelijk zullen leveren.

Er zij hier nog opgemerkt, dat deze methode ook bruikbaar (en door Heins ook inderdaad toegepast) is voor problemen in analoge ("stripvormige") gebieden, in de theorie van electromagnetische en acoustische golven.

### 3. De eigenwaarde-methode.

Deze is afkomstig van Weinstein en berust op de ontwikkeling van  $\varphi(x,y)$  naar de eigenfuncties van een (verwant) gewoon randprobleem. Deze methode heeft niet zeer veel zelfstandige betekenis, maar kan leiden tot een verkorting van de reductiemethode, wanneer ze in combinatie met deze wordt gebruikt. Verder is ze wel nuttig voor het theoretisch inzicht, dat men geen voortlopende golven kan vinden, als men alleen reguliere oplossingen voor  $\varphi(x,y)$  toelaat, maar dat men een reguliere en een logaritmisch singuliere oplossing moet combineren. Aangezien deze methode in haar uitvoering weinig ingewikkeld is, geven we geen voorbeeld, maar verwijzen direct naar de §§ 2 en 4 van de desbetreffende publicatie van Weinstein [43].

## § 7. Literatuuroverzicht.

We zullen in deze paragraaf een overzicht geven van de verschillende publicaties, ingedeeld naar de in § 5 genoemde problemen, en voor ieder probleem in chronologische volgorde, terwijl we in het algemeen enige aanduidingen zullen geven betreffende de gevolgde oplosmethode. (De notaties zijn gelijk aan die van § 5).

### 1<sup>o</sup>. Uniform hellende bodem.

In 1926 beschouwde Hanson [13] het tweedimensionale geval

$\gamma = \frac{1}{2n}$ , met  $n$  geheel  $\geq 1$  en gaf hiervoor een oplossing. Hij slaagde echter niet in de constructie van een uit oneindig komende voortlopende vlakke golf, omdat hij voor  $\varphi$  alleen een reguliere oplossing



bepaalde. Na hem werd  $\gamma = \frac{1}{2n}$  beschouwd door Miche [30] in 1944. In 1946 lost Lewy [29] het tweedimensionale geval  $\gamma = \frac{p}{2q}$  met  $p$  oneven,  $0 < p < 2q$ ,  $(p,q) = 1$  op met behulp van de reductiemethode. Hij vond inderdaad een lopende golf op oneindig door een reguliere en een aan de kust ( $x = y = 0$ ) logarithmisch singuliere oplossing van  $\varphi$  te superponeren.

Stoker [39] gaf in 1947 de oplossing met de reductiemethode voor  $\gamma = \frac{1}{2n}$  in het twee-, zowel als in het driedimensionale geval. Ook gaf hij een aantal praktische berekeningen.

(N.B.: Van hieraf zullen we onder "een oplossing" steeds verstaan een oplossing in de vorm van een voortlopende vlakke golf op oneindig).

In 1948 volgde voor  $\gamma \ll 1$  (tweedimensionaal) een oplossing van Friedrichs [6] met behulp van asymptotische ontwikkeling (zadelpuntsmethode), welke voor  $n = 15$  goed klopt met de oplossing van Stoker. Verder verschenen in dat jaar oplossingen van Friedrichs en Lewy [7] voor het tweedimensionale geval  $\gamma = 1$  (het dokprobleem bij oneindige diepte), verkregen langs functietheoretische weg door oplossingen te zoeken in de vorm van een complexe integraal, en van Isaacson [20] voor  $\gamma = \frac{3}{4}$  (overhangende klip; tweedimensionaal) met een methode, analoog aan de reductiemethode. Isaacson vond enige belangrijke verschillen met de oplossing van Lewy voor  $\gamma = \frac{p}{2q}$  met  $p = 3$ ,  $q = 2$ .

Weinstein [43] gaf in 1949 een oplossing voor het driedimensionale geval  $\gamma = \frac{1}{2}$  m.b.v. een combinatie van de eigenwaarde- en de reductiemethode.

In 1950 loste Isaacson [21] het tweedimensionale probleem op voor willekeurige  $\gamma$  ( $0 < \gamma \leq 1$ ). Zijn methode berust op die van Friedrichs en Lewy voor het dokprobleem. Voorts verschenen in 1950 en 1951 enige publicaties van Roseau [36] en [37] met resultaten, analoog aan die van Isaacson. In 1952 tenslotte heeft Peters [34] de oplossing gegeven voor het driedimensionale geval met willekeurige  $\gamma$  tussen 0 en 1 door het probleem in poolcoördinaten op te lossen met behulp van Laplace-Transformatie naar de radius.

## 2°. A. Horizontale vlakke barrieres.

Bij alle opgeloste problemen is gebruik gemaakt van de methode van Heins, en wel steeds voor driedimensionale gevallen. In de notatie volgens de figuur in § 5. 2° A. verwijzen we voor:

$a = \infty$ ,  $b = 0$  naar Heins [14] (1947);  $a < \infty$ ,  $b = 0$ : Heins [15] (1948);  $a < \infty$ ,  $0 < b < a$ : Heins [16] (1950) en [18] (1953);  $a = \infty$ ,  $0 \leq b < \infty$ : Greene [8] (1951);  $a = \infty$ ,  $0 \leq b < \infty$ : Greene en Heins [9] (1953).

(Bij deze problemen is steeds een reguliere oplossing voor  $\varphi$  bepaald, en een die logarithmisch singulier is in het punt  $(0, -b)$ ).



## B. Verticale vlakke barrieres.

Dean [4] publiceerde in 1945 een oplossing voor (tweedimensionaal)  $a = 0$ ,  $0 < b < \infty$  (zie figuur § 5. 2° B), terwijl Ursell [40] in 1947 een oplossing gaf voor willekeurige  $a$  en  $b$  (tweedimensionaal) met behulp van een integraalvergelijking. (Deze integraalvergelijking zou herleid kunnen worden tot een van het Wiener-Hopf type, zoals optreden bij de methode van Heins, maar dit is niet noodzakelijk; Ursell gaf een directe oplossing).

## C. Scheefstaande vlakke barrieres.

Voor tweedimensionale gevallen, waarin deze barriere een hoek  $\frac{\pi}{2n}$  maakt met het ongestoorde wateroppervlak, is de oplossing gepubliceerd door John [22] in 1948, gevonden m.b.v. de reductiemethode. (In het geval van een eindig lange barriere van het oppervlak naar beneden, neemt John twee logaritmische singulariteiten aan in de uiteinden van deze barriere).

### 3°. Andere barrieres.

Er zijn enige artikelen verschenen over het tweedimensionale geval van een circulaire cylinder onder het wateroppervlak. We gaan hierop niet in, maar verwijzen naar Dean [5] en Ursell [41].

### 4°. Problemen met een "floating-mat" voorwaarde.

De invoering van deze voorwaarde aan het "vrije oppervlak", teneinde problemen betreffende gebroken ijsvelden e.d. in eerste benadering op te lossen, is afkomstig van Peters [33] (1948) voor een tweedimensionaal probleem. (Bv.: een half vlak is bedekt met een "floating mat" en de lijnen van constante phase van de voortlopende golf op oneindig lopen evenwijdig aan de rand van deze laag). Peters loste meer algemeen het geval op dat de voorwaarde (5.4) geldt langs de halfrechte  $y + x \cdot \operatorname{tg} \pi \gamma = 0$  ( $y < 0$ ;  $0 < \gamma \leq 1$ ). Het hierboven genoemde voorbeeld correspondeert dan met  $\gamma = 1$ , terwijl voor  $k_1 = 0$  in (5.4), ( $k_1$  gegeven door (5.5)) we voor willekeurige  $\gamma$  het door Isaacson opgeloste algemene tweedimensionale geval van een uniform hellende bodem krijgen en voor  $\gamma = 1$  het dokprobleem. De oplossing van Peters klopt inderdaad voor  $k_1 = 0$  met die van Isaacson [21] en voor  $k_1 = 0$ ,  $\gamma = 1$  met het resultaat van Friedrichs en Lewy [7]. Peters volgt een functietheoretische methode, die leidt tot een differentie-differentiaalvergelijking, die hij algemeen oplost.

We gaan op problemen van deze aard niet verder in; merken slechts op dat ook de methode van Heins geschikt is, speciaal bij driedimensionale problemen, en verwijzen naar de volgende publicaties: Weitz en Keller [45] (1950) en [46] (1953), Heins [17] (1951), Weitz [44] (1952), Keller en Goldstein [26] (1953) en Shapiro en Simpson [38] (1953). Voor meer algemene theorie over drijvende lichamen zij hier



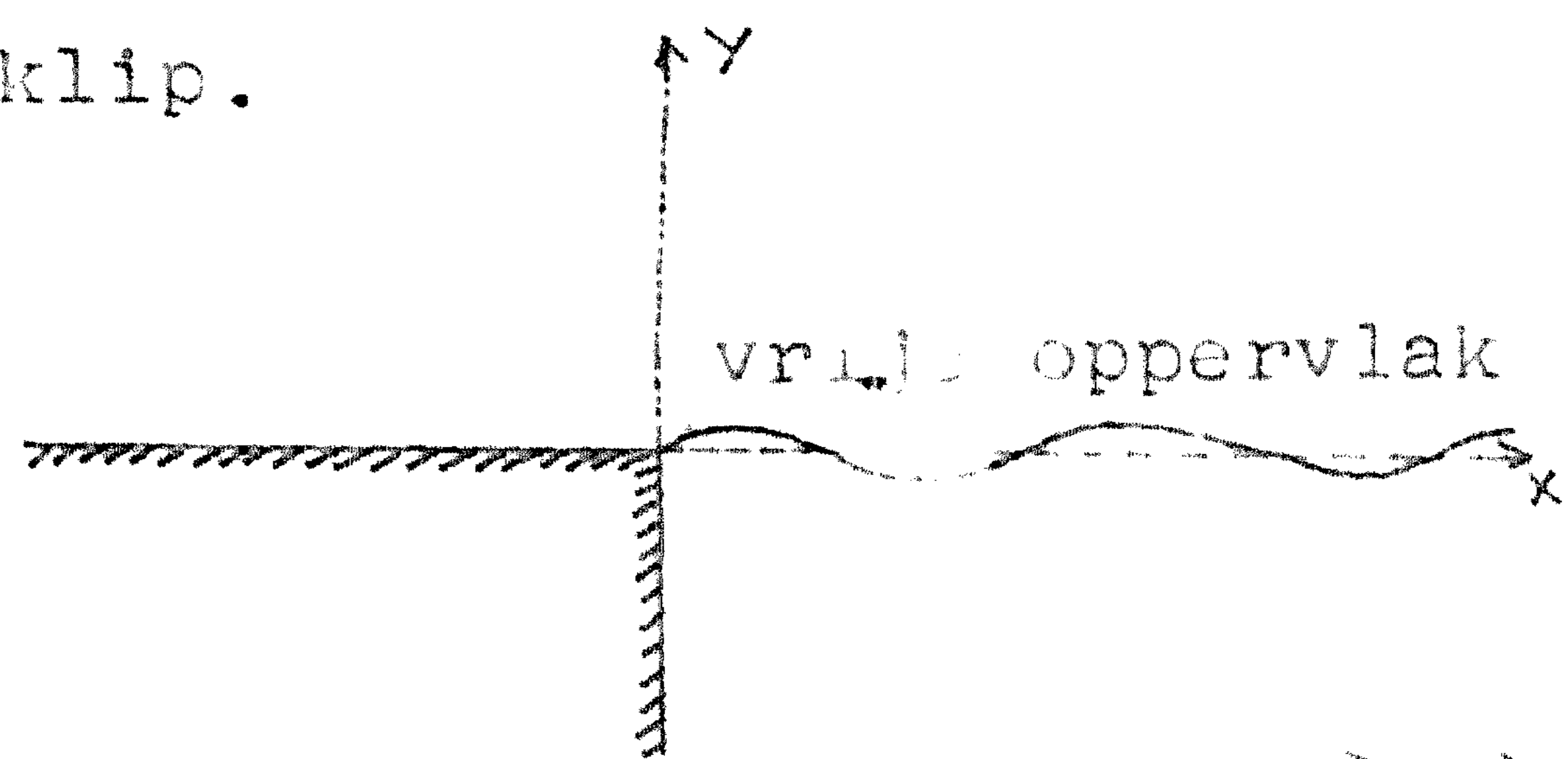
nog gewezen op enige artikelen van John [23],[24],[25].

We besluiten dit literatuuroverzicht met het volledigheidshalve noemen van enige publicaties over gravitatiegolven, die buiten de door ons beschouwde problemen vallen, of uitgaan van andere veronderstellingen, zoals:

- a. Enige artikelen van Davies [2] en [3], die gravitatiegolven van eindige amplitude beschouwt, en de randvoorwaarde aan een vrij oppervlak niet lineariseert.
- b. Een methode van Gröbner [10], die problemen voor een eindig lang kanaal oplost m.b.v. een variatieprincipe.
- c. Een artikel van Kreisel [27], die het geval van tweedimensionale oppervlakte golven in een oneindig lang kanaal van willekeurige diepte beschouwt, waarbij zich kleine (cylindrische veronderstelde) obstakels op de overigens horizontale bodem bevinden, terwijl hij ook variaties in de atmosferische druk aan de oppervlakte aanneemt.
- d. Enige artikelen van Groen [11] en [12], die gelaagde vloeistoffen beschouwt met een zekere verticale dichtheidsverdeling, zodat ook inwendige golven ter sprake komen.

## § 8. Een voorbeeld van de reductiemethode.

Als voorbeeld van deze methode behandelen we: het tweedimensionale probleem van de constructie van vlakke voortlopende golven in een oneindig diepe oceaan, die aan een zijde begrensd wordt door een verticale klip.



Volgens de gegeven theorie komt dit neer op het oplossen van het volgende potentiaalprobleem:

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{voor} \quad \begin{cases} 0 \leq y < +\infty \\ 0 \leq x < +\infty \end{cases} \quad (8.1)$$

met randvoorwaarden:

$$\varphi_y = k \varphi \quad \text{voor} \quad y = 0, x > 0 \quad (k > 0) \quad (8.2)$$

$$\varphi_x = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0, y < 0 \quad (8.3)$$

met als extra eis:

$$\varphi, \varphi_x \text{ en } \varphi_y \text{ uniform begrensd voor } x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

We bepalen eerst langs eenvoudige weg een reguliere oplossing: (8.3) maakt het mogelijk  $\varphi(x,y)$  door spiegeling t.o.v. de negatieve Y-as analytisch voort te zetten in het gehele onderste halve vlak en



voor dit geval (kanaal met overal oneindige diepte) hebben we in § 4 aangetoond, dat de enige reguliere oplossing van de gedaante

$$\varphi = A e^{ky} \cos(kx + \alpha) \text{ met willekeurige reële } A \text{ en } \alpha \text{ is.}$$

Omdat de oplossing echter noodzakelijk een even functie van  $x$  moet zijn, zien we direct in:

de enige in het gehele  $4^e$  kwadrant reguliere oplossingen worden gegeven door:  $\varphi_1(x, y) = A e^{ky} \cos kx$ . M.a.w.: alle niet-singuliere oplossingen die begrensd zijn op  $\infty$ , hebben op  $\infty$  dezelfde phase, nl. ze gedragen zich daar als  $\cos kx$ . Teneinde voortlopende golven te vinden voor  $\Phi(x, y; t)$  moeten we echter ook een oplossing  $\varphi_2(x, y)$  vinden die zich op  $\infty$  gedraagt als  $\sin kx$ , (die daar dus  $90^\circ$  "uit phase" is met de reguliere oplossing) en het is dus duidelijk dat we daartoe een singulariteit zullen moeten toestaan. Het ligt voor de hand de zwakste singulariteit, dus een logaritmische, aan te nemen en eveneens is het plausibel deze aan te nemen aan de kust, dus in  $x = y = 0$ .

We kunnen niet a priori zeggen, dat deze oplossing het goede gedrag op  $\infty$  zal vertonen, maar bepalen eenvoudigweg de oplossing en tonen dan aan, dat deze zich op  $\infty$  gedraagt als  $\sin x$ .

We formuleren het probleem voor  $\varphi_2(x, y)$  nu volledig als volgt:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_2(x, y) \text{ moet voldoen aan (8.1) tot en met (8.3) en verder:} \\ \text{in de buurt van } 0 \text{ kan } \varphi_2 \text{ worden voorgesteld door} \\ \varphi_2 = \bar{\varphi} \log r + \bar{\bar{\varphi}} \quad (8.4) \\ \text{met } r^2 = x^2 + y^2 \text{ en } \bar{\varphi} \text{ en } \bar{\bar{\varphi}} \text{ functies die tezamen met hun eerste} \\ \text{twee afgeleiden begrensd zijn in een omgeving van } 0. \\ \text{Op } \infty \text{ eisen we dat } \varphi_2 \text{ en de eerste twee afgeleiden uniform be-} \\ \text{grensd zijn.} \end{array} \right.$$

We lossen dit vraagstuk langs functietheoretische weg op met behulp van de reductiemethode.

Stel  $\varphi_2 = \operatorname{Re} f(z)$  met  $f(z)$  analytisch. Het probleem formuleren we nu als een probleem voor  $f(z)$ :

$$\underline{a.} \ f(z) \text{ moet analytisch zijn in het gebied: } \begin{cases} \operatorname{Im} z \leq 0 \text{ behalve in } z=0 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

b. Voor  $\operatorname{Im} z = 0$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$  moet gelden:

$$\operatorname{Re} (iD - k) f(z) = \operatorname{Re} L_1(D) f(z) = 0 \quad (8.6)$$

( $D$  is operator  $\frac{d}{dz}$ ).

c. Voor  $\operatorname{Im} z < 0$ ,  $\operatorname{Re} z = 0$ :

$$\operatorname{Re} D f(z) = \operatorname{Re} L_2(D) f(z) = 0 \quad (8.7)$$



d. Op  $\infty$  voldoet  $f(z)$  binnen het genoemde gebied aan de eisen:

1.  $\left| \frac{df}{dz} \right|$  en  $\left| \frac{d^2f}{dz^2} \right|$  zijn uniform begrensd in  $z$ , als  $|z| \rightarrow \infty$ , maar ook aan:
2.  $\left| \frac{df}{dz} \right|$  en  $\left| \frac{d^2f}{dz^2} \right| \rightarrow 0$  langs alle rechten in het kwartvlak, die niet evenwijdig lopen aan de grenzen.

e. In de buurt van  $z = 0$  geldt binnen het kwartvlak voor  $f(z)$ :

$$\left| \frac{df}{dz} \right| < \frac{M_1}{|z|} \quad \text{en} \quad \left| \frac{d^2f}{dz^2} \right| < \frac{M_2}{|z|^2} \quad \text{met } M_1 \text{ en } M_2 \text{ constanten.}$$

Dat dit probleem voor  $f(z)$  volgt uit dat voor  $\mathcal{Q}_2$ , tonen we aan:

a. is direct duidelijk.

b. volgt uit (8.2) omdat:  $\operatorname{Re} (iD-k) f(z) = \mathcal{Q}_y - k\mathcal{Q}$ .

c. volgt direct uit (8.3).

d. 1. volgt uit de eis voor  $\mathcal{Q}_2$  en de afgeleiden op  $\infty$  volgens de Cauchy-Riemann vergelijkingen (die leveren:  $\frac{df}{dz} = \mathcal{Q}_x - i\mathcal{Q}_y$  dus  $\left| \frac{df}{dz} \right| \leq |\mathcal{Q}_x| + |\mathcal{Q}_y|$ ).

2. dit volgt uit de eis voor  $\mathcal{Q}_2$  op  $\infty$  volgens het Lemma dat we aan het eind van dit voorbeeld zullen bewijzen, (zie p.23).

e. volgt uit de eis voor  $\mathcal{Q}_2$  in de buurt van 0, omdat daar  $r\mathcal{Q}_x$ ,  $r\mathcal{Q}_y$ ,  $r^2\mathcal{Q}_{xx}$  en  $r^2\mathcal{Q}_{yy}$  begrensd moeten zijn en dus ook  $|z f'|$  en  $|z^2 f''|$  volgens de Cauchy-Riemann vergelijkingen.

Het principe van de reductiemethode berust nu op de aard van de voorwaarden (8.6) en (8.7) en op de lineariteit van de daarin optredende operatoren  $L_1(D)$  en  $L_2(D)$ . Er geldt nl. dat:

$$\operatorname{Re} L_1 L_2 [f] = \operatorname{Re} L_2 L_1 [f] = 0 \quad (8.8)$$

op de gehele rand van het gebied. Daarom voeren we in de functie

$$F(z) = L_2 L_1 [f(z)] = \frac{d}{dz} \left( i \frac{d}{dz} - k \right) \cdot f(z) \quad (8.9)$$

Volgens (8.8) is nu het reële deel van  $F(z)$  gelijk 0 langs beide grenzen van het kwartvlak en daarom kunnen we  $F(z)$  m.b.v. spiegeling voortzetten in het gehele complexe vlak. (N.B.: Hier wordt het duidelijk waarom deze reductiemethode door Stoker werd toegepast op kusten, die hellen onder een hoek  $\frac{\pi}{2n}$  met  $n$  geheel). Het resultaat is een eenwaardige functie waarvan het reële deel nul is langs de gehele imaginaire en reële as.

In de oorsprong heeft  $F(z)$  hoogstens een pool van de tweede orde, immers: in de buurt van  $z = 0$  geldt  $\left| \frac{df}{dz} \right| < \frac{M_1}{|z|}$  en  $\left| \frac{d^2f}{dz^2} \right| < \frac{M_2}{|z|^2}$  in het kwartvlak en deze grenzen leiden tot:



$|F(z)| < \frac{M_3}{|z|^2}$  in een gehele omgeving van  $z = 0$  volgens (8.9) en het feit, dat we  $F(z)$  hebben voortgezet door spiegeling. Dientengevolge kunnen we  $F(z)$  in het gehele  $z$ -vlak voorstellen door een Laurent-reeks van de gedaante:

$$F(z) = \frac{\alpha_{-2}}{z^2} + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots = \frac{\alpha_{-2}}{z^2} + \frac{\alpha_{-1}}{z} + P(z)$$

waarin  $P(z)$  overal regulier is.

Uit de eis c. 1 voor  $\frac{df}{dz}$  en  $\frac{d^2f}{dz^2}$  volgt echter volgens (8.9) dat ook  $F(z)$  uniform begrensd is op  $\infty$  (hieruit:  $P(z) = \text{constant}$ ). c.2 levert dat  $|F(z)| \rightarrow 0$  langs alle rechten die niet evenwijdig aan de imaginaire of de reële as zijn, (hieruit volgt  $P(z) = 0$ ).

Zodat:  $F(z)$  is van de gedaante:  $\frac{\alpha_{-2}}{z^2} + \frac{\alpha_{-1}}{z}$ .

Nu moet nog:  $\text{Re } F(z) = 0$  langs reële en imaginaire as.

$z$  reëel levert: ( $z=x$ ):  $\text{Re } F(z) = \frac{\text{Re } \alpha_{-2}}{x^2} + \frac{\text{Re } \alpha_{-1}}{x} = 0$  dus:

$$\alpha_{-2} = iA \quad \text{en} \quad \alpha_{-1} = iC \quad \text{met } A \text{ en } C \text{ reeel.}$$

$z$  imaginair geeft: ( $z=iy$ ):  $F(z) = \frac{-iA}{y^2} + \frac{C}{y}$

dus  $\text{Re } F(z) = \frac{C}{y} = 0$  waaruit volgt:  $C = 0$ .

Derhalve volgt uit de definitie van  $F(z)$  en uit de eisen voor  $f(z)$ , dat:

$$F(z) \equiv A \frac{1}{z^2}, \quad A \text{ reeel.} \quad (8.10)$$

zodat de oplossingen  $\varphi(x,y)$  van potentiaalprobleem (P) het reële deel moeten zijn van een analytische functie  $f(z)$ , die volgens (8.9) en (8.10) voldoet aan de gewone differentiaalvergelijking:

$$\frac{d}{dz} \left( i \frac{d}{dz} - k \right) \cdot f(z) = A \cdot \frac{1}{z^2}, \quad A \text{ reeel, of:}$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{d}{dz} + ik \right) \cdot f(z) = \frac{A}{z^2}. \quad (8.11)$$

Het probleem is dus gereduceerd tot het bepalen van oplossingen van de inhomogene differentiaalvergelijking (8.11), die tevens voldoen aan de randvoorwaarden (8.6) en (8.7) en aan de voorwaarden op  $\infty$  en bij 0. Er zal blijken dat zulke oplossingen van (8.11) bestaan, en verder dat deze zich op  $\infty$  gedragen als  $Ae^{ky} \cdot \cos(kx + \varepsilon)$ ,  $A$  en  $\varepsilon$  reeel.

We integreren (8.11) eenmaal, wat levert:

$$\left( \frac{d}{dz} + ik \right) \cdot f(z) = -\frac{A}{z} + \beta. \quad (\beta = \text{integratie-constante}). \quad (8.12)$$



Volgens (8.6) moet  $\operatorname{Re} \left( i \frac{d}{dz} - k \right) \cdot f(z) = 0$  voor  $z$  reëel en positief, dus  $\operatorname{Re} \left( -i \frac{A}{z^2} + i \beta \right) = 0$  waaruit volgt:  $\beta$  reëel.

Een particuliere oplossing van (8.12) is:  $f(z) = -\frac{1}{k} \beta$ , zodat  $\beta$  slechts aanleiding geeft tot een additieve imaginaire constante in de algemene oplossing voor  $f$ , en derhalve geen bijdrage tot de gezochte functie  $\varphi = \operatorname{Re} f(z)$ . We nemen daarom gemakshalve  $\beta = 0$ , zodat:

$$\left( \frac{d}{dz} + ik \right) \cdot f(z) = -\frac{A}{z}, \quad A \text{ reëel.} \quad (8.13)$$

Alle oplossingen van (8.13) voldoen nu automatisch aan (8.6).

Van (8.13) bepalen we de algemene oplossing; de oplossing van de homogene vergelijking is:  $f(z) = \alpha e^{-ikz}$  ( $\alpha$  will. complexe const.) en teneinde een particuliere integraal te verkrijgen stellen we  $f(z) = \alpha(z) \cdot e^{-ikz}$  (variatie van constanten). (8.13) geeft dan:

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{A}{z} e^{ikz}, \quad \text{dus: } \alpha(z) = -A \int_{i\infty}^z \frac{e^{ik\zeta}}{\zeta} d\zeta, \quad \text{waarin we als integratieweg kiezen: langs de positieve imaginaire as vanaf } i\infty, \text{ dan een cirkelboogje in positieve richting om } \zeta = 0, \text{ en tenslotte langs een straal naar } z \text{ (} z \text{ in het vierde kwadrant).}$$

De integraal convergeert in dat

geval. We nemen nog als nieuwe

integratievariabele  $\zeta = \frac{it}{k}$ ,

$$\text{wat oplevert: } \alpha(z) = -A \int_{i\infty}^{-ikz} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

zodat we als algemene oplossing van

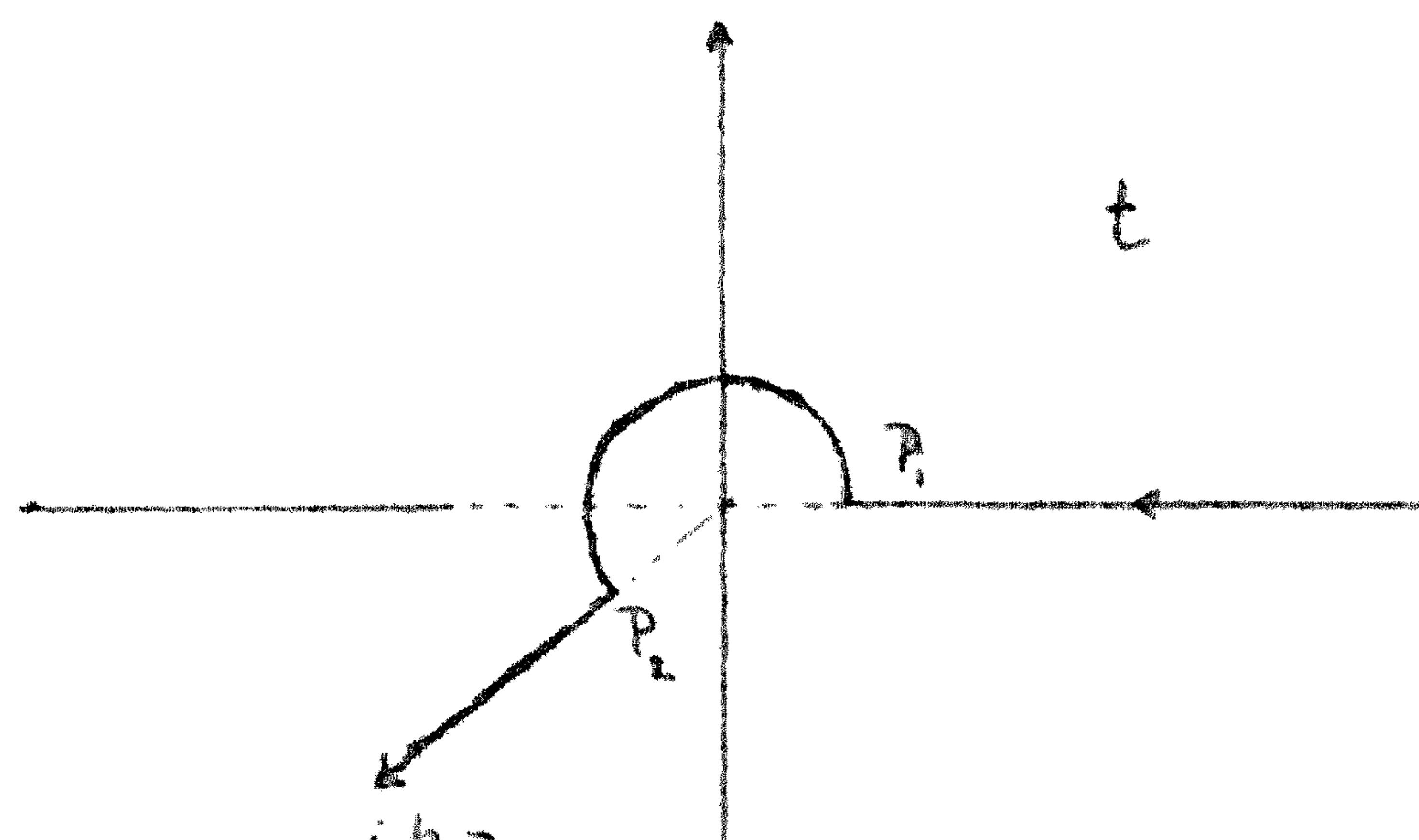
(8.13) vinden:

$$f(z) = \alpha e^{-ikz} = -A e^{-ikz} \int_{i\infty}^{-ikz} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (8.14)$$

waarin de integratieweg loopt

als in de volgende figuur (omdat

$k > 0$ ):



Nu moeten we nog voldoen aan (8.7):

Volgens (8.13) is  $\frac{df}{dz} = -\frac{A}{z} - ik f(z)$  dus:

$$\frac{df}{dz} = -A \left\{ \frac{1}{z} - ike^{-ikz} \int_{+\infty}^{-ikz} \frac{e^{-t}}{t} dt \right\} - ik\alpha e^{-ikz}$$

en voor  $z$  op de negatieve imaginaire as, moet  $\operatorname{Re} \frac{df}{dz} = 0$ .



$z$  op de negatief imaginaire as, betekent  $-ikz$  negatief reeel, dus ook  $e^{-ikz}$  reeel. Verder zijn van de integraal de stukken van  $+\infty$  naar  $P_1$  en van  $P_2$  naar  $-ikz$  reeel. De integraal langs de boog is  $\pi i$ . (Residu van  $\frac{e^{-t}}{t}$  in  $t = 0$  is 1, en we lopen in positieve richting langs een halve cirkel om  $t = 0$ ). Voorts is  $\frac{1}{z}$  positief imaginair. We vinden derhalve:

voor  $z$  op de negatief imaginaire as, is:  $\operatorname{Re} \frac{df}{dz} = -\pi A k e^{-ikz} + k e^{-ikz} \operatorname{Im} \alpha$ . Teneinde aan (8.7) te voldoen, moeten we dus nemen:  $\operatorname{Im} \alpha = \pi A$ . We stellen daarom:  $\alpha = B + \pi i A$ , ( $B$  willekeurig reeel) en vinden zo: alle oplossingen van (8.13) die aan de randvoorwaarden (8.6) en (8.7) voldoen, worden gegeven door:

$$f(z) = B e^{-ikz} + A e^{-ikz} \cdot \left\{ \pi i - \int_{+\infty}^{-ikz} \frac{e^{-t}}{t} dt \right\} \quad (8.15)$$

met  $B$  en  $A$  reële constanten.

We moeten nu het gedrag bij 0 en op  $\infty$  voor  $z$  in het vierde kwadrant nog nagaan. Het is duidelijk dat  $e^{-ikz}$  voor  $z$  bij 0 regulier is en dat de integraal daar een logaritmische singulariteit heeft. Voor  $|z| \rightarrow \infty$  in het vierde kwadrant is  $e^{-ikz}$  uniform begrensd (en ook alle afgeleiden) omdat  $k > 0$ , en  $e^{-ikz}$  en de afgeleiden  $\rightarrow 0$  als  $|z| \rightarrow \infty$  langs een rechte die niet evenwijdig is aan de reële as. Voor de integraal gebruiken we de volgende asymptotische ontwikkeling:

$$\int_{+\infty}^{-ikz} \frac{e^{-t}}{t} dt \sim 2\pi i - i e^{ikz} \left\{ \frac{1}{kz} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right\} \quad (8.16)$$

(Deze ontwikkeling bewijzen we niet, maar verwijzen naar Appendix II in Stokker [39]). Uit (8.16) volgt:

$$A e^{-ikz} \left\{ \pi i - \int_{+\infty}^{-ikz} \frac{e^{-t}}{t} dt \right\} \sim A e^{-ikz} \left\{ \pi i + O\left(\frac{1}{z}\right) \right\} \quad (8.17)$$

zodat aan de voorwaarden bij 0 en op  $\infty$  door de oplossingen (8.15) wordt voldaan. Als oplossing voor het op pag. 19 in a. tot en met e. geformuleerde probleem, hebben we dus gevonden:  $f(z)$  moet een lineaire combinatie zijn met reële coëfficiënten van de volgende lineaire onafhankelijke oplossingen:

$$f_1(z) = e^{-ikz} \quad (8.18a)$$

$$f_2(z) = e^{-ikz} \left\{ \pi i - \int_{\infty}^{-ikz} \frac{e^{-t}}{t} dt \right\} \quad (8.18b)$$

Voor het potentiaalprobleem (P) hebben we als oplossingen: lineaire combinaties met reële coëfficiënten van:



$$\varphi_1(x,y) = e^{ky} \cos kx \quad (8.19a)$$

$$\varphi_2(x,y) = \operatorname{Re} \left[ e^{-ikz} \left\{ \pi i - \int_{\infty}^{-ikz} \frac{e^{-t}}{t} dt \right\} \right] \quad (8.19b)$$

Hierin is  $\varphi_1$  de reguliere oplossing, die we al op pag. 18 rechtstreeks hebben bepaald en  $\varphi_2$  de in  $x = y = 0$  logarithmisch singuliere. Uit (8.17) volgt, dat  $f_2(z)$  zich op  $\infty$  gedraagt als  $ie^{-ikz}$ , dus  $\varphi_2$  als  $\operatorname{Re} [ie^{-ikz}] = \operatorname{Re} [e^{-1(kz - \pi/2)}] = e^{ky} \sin kx$ , zodat door lineaire combinatie van  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  inderdaad oplossingen voor  $\Phi(x,y;t)$  verkregen kunnen worden, die op  $\infty$  het karakter hebben van een vlakke voortlopende golf.

We bewijzen nu nog het volgende Lemma, dat we al gebruikt hebben bij eis d.2 voor  $f(z)$  op pag. 19.

Lemma: Als  $f(z)$  een reguliere analytische functie is in het inwendige van een sector van het complexe vlak en  $\varphi = \operatorname{Re} f(z)$  is uniform begrensd voor  $|z| \rightarrow \infty$  binnen de sector, dan geldt:  $\left| \frac{d^n f}{dz^n} \right| \rightarrow 0$  als

$|z| \rightarrow \infty$  langs een rechte die niet evenwijdig is aan een van de zijden van de sector, voor iedere gehele  $n \geq 1$ .

Bewijs: Zij  $z_0$  een willekeurig inwendig punt van de sector, dan wordt  $f(z)$  op de cirkel  $C: |z - z_0| = R$  gegeven door de waarden van  $\varphi(x,y)$  op die cirkel met behulp van de formule van Poisson-Schwartz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta + z - 2z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \cdot \varphi(\zeta) d\zeta,$$

(waarbij  $R$  zodanig is genomen, dat  $C$  met inbegrip van de rand, nog geheel binnen de sector valt). Daaruit volgt:  $\frac{df}{dz} = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$

en omdat  $\varphi$  een reguliere potentiaalfunctie is, geldt:  $|\varphi| < M_1$  op  $C$ ,

zodat  $\left| \left( \frac{df}{dz} \right)_{z=z_0} \right| < \frac{M_1}{\pi} \left| \int_C \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} \right| = \frac{M_1}{\pi R} \left| \int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} d\varphi \right| = \frac{2M_1}{R}$ , dus

in een willekeurig inwendig punt  $z = z_0$  geldt:  $\left| \frac{df}{dz} \right| < \frac{M_2}{R}$  met  $M_2$  een

positieve constante en  $R$  de straal van een cirkel, die nog geheel binnen de sector ligt. Hieruit volgt direct (omdat  $\varphi$  uniform begrensd op  $\infty$ ): als  $|z| \rightarrow \infty$  langs een rechte binnen de sector die niet evenwijdig is aan een van de zijden, nadert  $\left| \frac{df}{dz} \right|$  tot 0. Omdat ook  $\varphi_x$  en  $\varphi_y$  potentiaalfuncties zijn en deze begrensd moeten zijn op  $\infty$  in een afgesloten deelgebied van de sector (dat volgt ook uit

$\left| \frac{df}{dz} \right| < \frac{M_2}{R}$  in willekeurig punt  $z = z_0$ ) kunnen we geheel analoog bewijzen, dat  $\left| \frac{d^2 f}{dz^2} \right| \rightarrow 0$ , enz.



Tot slot van deze paragraaf nog een opmerking betreffende de gevonden oplossing: We hebben gezien dat we nu in staat zijn een oplossing voor  $\Phi(x,y;t)$  te geven, die op  $\infty$  het karakter aanneemt van een vlakke lopende golf van willekeurige amplitude en phase. Schrijven we deze amplitude en phase op  $\infty$  voor en eisen we dat deze golf naar de kust toe loopt, dan is de oplossing eenduidig vastgelegd. Stoker [39] berekende de oplossing voor enige hellingshoeken van de kust ( $\frac{\pi}{2n}$  met  $n = 1, 2, 15$ ) en de numerieke resultaten leverden op dat de golflengten en de amplitudes zeer weinig verschillen van de waarde op  $\infty$ , tot aan punten die ongeveer een golflengte uit de kust liggen (met golflengte wordt de golflengte op  $\infty$  bedoeld). Daarna neemt de amplitude snel toe en wordt oneindig groot aan de kust. (Logarithmische singulariteit). Hoewel dit natuurlijk in strijd is met de bij de linearisatie gebruikte veronderstelling van "infinitesimale" bewegingen, is dit niet geheel verwonderlijk omdat we ook hebben verondersteld dat de diepte groot was t.o.v. de golflengte en bij hellingshoeken  $< \frac{\pi}{2}$  zal men in de buurt van de kust een andere methode moeten volgen. Stoker berekent daar een oplossing m.b.v. de shallow-water theory. Het voert te ver, hier thans dieper op in te gaan; men zie de inleiding (pag. 4 en 5) van het artikel van Stoker.

#### 9. Een voorbeeld van de methode van Heins.

Als voorbeeld behandelen we: Het driedimensionale dokprobleem bij een eindig diep kanaal (zie Heins [15]). Dat komt volgens de gegeven theorie dus neer op het volgende randwaardeprobleem:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - m^2 \varphi = 0, \quad m \text{ reëel} \quad (9.1)$$

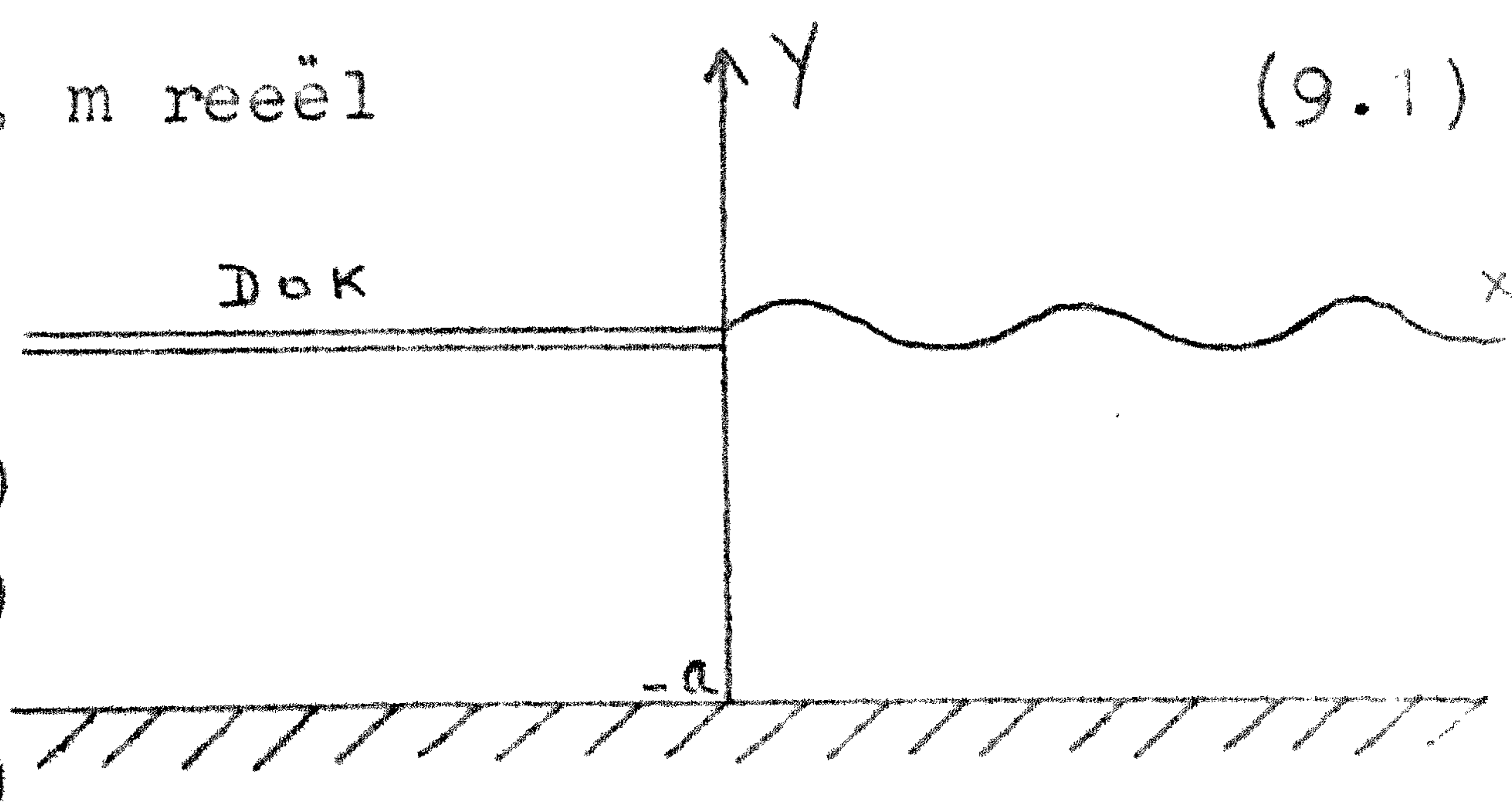
voor  $-a \leq y \leq 0, \quad -\infty < x < \infty$

met randvoorwaarden:

$$\varphi_y = 0 \text{ voor } y = -a, \quad -\infty < x < +\infty \quad (9.2)$$

$$\varphi_y = 0 \text{ voor } y = 0, \quad x < 0 \quad (9.3)$$

$$\varphi_y = k \varphi \quad (k > 0) \text{ voor } y = 0, \quad x > 0 \quad (9.4)$$



We behandelen het vinden van de oplossing niet in extenso, maar verwijzen voor theoretische beschouwingen e.d. naar het bovengenoemde artikel van Heins; wij geven slechts de directe loop van de oplossing aan. Daartoe bepalen we eerst een Greense functie, en wel een voor een analoog randprobleem, echter met niet-gemengde randvoorwaarden. (De randvoorwaarde langs  $y = 0$  in ons geval noemt men een gemengde randvoorwaarde, omdat voor  $x > 0$  en  $x < 0$  verschillend type



randvoorwaarden gelden, nl. respectievelijk een van de derde soort en een van de tweede soort). Precies gezegd: we bepalen een functie  $G(x,y;x',y')$  die voldoet aan:

a.  $G_{xx} + G_{yy} - m^2 G = 0 \quad (9.5) \quad \text{voor } -a \leq y \leq 0, \quad -\infty < x < +\infty,$

behalve in het punt  $x = x', y = y'$ .

b. In  $(x',y')$  gedraagt  $G$  zich als:  $-\frac{1}{4\pi} \log \{ (x-x')^2 + (y-y')^2 \} \quad (9.6)$

c. Voor  $y = 0, \quad -\infty < x < +\infty$  stellen we als randvoorwaarde:  $G_y = 0$ .

d. Voor  $y = -a, \quad -\infty < x < +\infty$  stellen we eveneens als randvoorwaarde:  $G_y = 0$ .

(Opmerking: Voor de voorwaarde d. kunnen we ook een andere nemen; de gekozen leidt echter tot een eenvoudige vorm van de te verkrijgen integraalvergelijking).

Een functie die aan deze eisen voldoet, bezit binnen de strip de volgende ontwikkeling:

$$G(x,y;x',y') = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a^2 m^2 + n^2 \pi^2} \cdot e^{-\sqrt{m^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} \cdot |x-x'|} \cdot \cos n\pi \frac{y+a}{a} \cdot \cos n\pi \frac{y'+a}{a} \quad (9.7)$$

(Accent bij de sommatie betekent, dat de coëfficiënt voor  $n=0$  vermenigvuldigd moet worden met  $\frac{1}{2}$ ). Zie voor de afleiding van deze Greense functie bv. Sommerfeld, Die Greense Funktion der Schwingungsgleichung, D.Math.Ver., Jahresber., vol.21 (1912), p.309-353. Wij poneren (9.7) en het is betrekkelijk eenvoudig om na te gaan dat deze functie aan alle eisen voldoet. (Zie eventueel Heins). De belangrijkste eigenschappen van deze Greense functie met het oog op het volgende zijn: in de eerste plaats dat  $G$  slechts een functie is van  $(x-x')$  en niet van  $x$  of  $x'$  afzonderlijk en in de tweede plaats dat  $G$  zich voor  $x \gg x'$  gedraagt als  $e^{|m| \cdot (x'-x)}$  en voor  $x \ll x'$  als  $e^{|m| \cdot (x-x')}$ .

Het doel is voor het  $\varphi$ -probleem een reguliere oplossing te zoeken, waarna men hieruit door differentiatie een oplossing verkrijgt die logaritmisch singulier is in  $x = y = 0$ ; deze twee geven dan lineair gecombineerd lopende golven op  $\infty$  voor  $\Phi$ .

Omdat dus  $\varphi$  overal in de strip regulier wordt aangenomen, volgt uit de eisen voor  $G$ , na toepassing van de bekende stelling van Green op de rechthoek:  $-1 \leq x \leq +1, \quad (1,1) \gg 0, \quad -a \leq y \leq 0$ , dat:

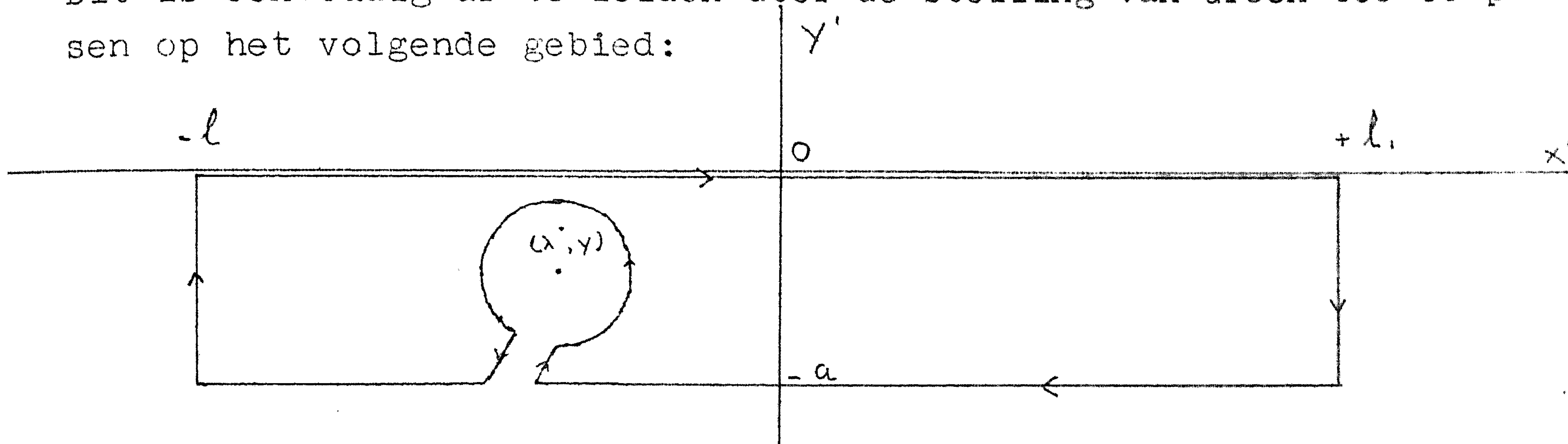
$$\varphi(x,y) = \int \left[ G(x,y,x',y') \cdot \frac{\partial \varphi(x',y')}{\partial n'} - \varphi(x',y') \cdot \frac{\partial G(x,y,x',y')}{\partial n'} \right] ds' \quad (9.8)$$



waarin:

$ds'$  = lijnelement langs de rand van de genoemde rechthoek en  $\frac{\partial}{\partial n'}$  betekent differentiatie langs de normaal naar buiten.

Dit is eenvoudig af te leiden door de stelling van Green toe te passen op het volgende gebied:



waarbij men rekening moet houden met het logaritmische gedrag van  $G$  in  $(x, y)$ , zoals voorgeschreven in (9.6).

We laten nu  $l$  en  $l_1 \rightarrow \infty$  en eisen dat  $\varphi(x, y)$  zo sterk naar 0 nadert voor  $x \gg 0$ , dat de integraal van  $(l_1, 0)$  tot  $(l_1, -a)$  tot 0 nadert als  $l_1 \rightarrow \infty$ . (Dit is dus een extra voorwaarde voor  $\varphi$ ; voor een uitvoeriger discussie, zie Heins). De integraal van  $(-l, -a)$  tot  $(-l, 0)$  levert geen bijdrage als  $l \rightarrow \infty$  vanwege het gedrag van  $G$  op  $\infty$ .

Maken we verder gebruik van de randvoorwaarden voor  $\varphi$  en van die voor  $G$ , dan volgt direct uit (9.8):

$$\varphi(x, y) = k \int_0^\infty G(x, y, x', 0) \cdot \varphi(x', 0) dx' \quad (9.9)$$

Laat nu  $y \uparrow 0$ , dan kan men aantonen dat men volgens (9.9) in de limiet verkrijgt:

$$\varphi(x, 0) = k \int_0^\infty G(x, 0, x', 0) \cdot \varphi(x', 0) dx' \quad (9.10)$$

We hebben dus een integraalvergelijking voor  $\varphi(x, 0)$  verkregen, en deze is van het Wiener-Hopf type, d.w.z. een integraalvergelijking van de gedaante

$$f(x) = \int_0^\infty K(x-y) \cdot f(y) dy \quad (9.11)$$

waarin de kern exponentieel afneemt voor grote  $|x|$ . Hier blijkt het belang van de eigenschap dat  $G$  alleen een functie is van  $(x-x')$ . Voor de theorie van deze integraalvergelijkingen verwijzen we naar [32] en voor de oplossing van (9.10) naar het meergenoemde artikel van Heins. Het idee van de methode van Heins is thans wel voldoende naarvoren gebracht, en de oplossing van (9.10) is verder een rekentechnische kwestie, waarvoor men de bestaande theorie over Wiener-Hopf vergelijkingen ten dienste heeft. De oplossing maakt gebruik van complexe Fouriertransformatie (ook Laplace transformatie kan dikwijls tot een oplossing leiden), waarbij men gebruik maakt van de speciale eigenschap



van de kern, immers: de integraal is van het convolutie-type en laat zich dus eenvoudig transformeren.

We merken hier nog op, dat de oplossing die Heins verkrijgt, zeer gecompliceerd is, maar zich wel leent voor numerieke bewerking.



Literatuurlijst.

Voor de bij artikelen onderstreepte nummers, gelden de volgende verwijzingen:

- 1 Annales des Ponts et Chaussées
- 2 Annals of the New York Academy of Sciences
- 3 Annali Scuola Normale Superiore Pisa
- 4 Amer. Journal of Mathematics
- 5 Bulletin of the Amer. Math. Society
- 6 Canadian Journal of Mathematics
- 7 Communications on Pure and Applied Math.
- 8 Comptes Rendus de l'Académie des Sc. Paris
- 9 Journal of Mathematics and Physics
- 10 National Bureau of Standards Circular 421, "Gravity Waves".
- 11 Physica
- 12 Proceedings Cambridge Philos. Society
- 13 Proceedings Royal Society of London
- 14 Quarterly Journal of Applied Mathematics
- 15 Transactions of the Amer. Geophysical Union

- 1 Airy; Tides and Waves 1845
- 2 Davies, T.V.; 13, A 208, 475-486, Gravity waves of finite amplitude 1951
- 3 —————; 14, 10, 57-67, Gravity waves of finite amplitude 1952
- 4 Dean, W.R.; 12, 41, 231-238, The reflexion of surface waves by a submerged plane barrier 1945
- 5 —————; 12, 44, 483-492, On the reflexion of surface waves by a submerged circular cylinder 1948
- 6 Friedrichs, K.O.; 7, 1, 109-134, Water waves on a shallow sloping beach 1948
- 7 Friedrichs, K.O. en Lewy H.; 7, 1, 135-148, The dock problem 1948
- 8 Greene T.R.; Doct. Diss. (Carnegie Inst. of Techn.) 1951
- 9 Greene, T.R. en Heins, A.E.; 14, 11, 201-214, Water waves over a channel of infinite depth 1953
- 10 Gröbner, W.; 3, 5, 175-191, Oberflächenwellen von Flüssigkeiten 1951
- 11 Groen, P.; 11, 14, 294-301, Two fundamental theorems on gravity waves in inhomogeneous incompressible fluids 1948
- 12 —————; Zwaartegolven in en op de zee (Symposium Ned. Natuurk. Ver. op 15-10-1949) 1949



- 13 Hanson, E.T.; 13, A 111, 491-529, The theory of ship waves 1926
- 14 Heins, A.E.; 5, 53, 374-382, Water waves over a channel of  
infinite depth with a dock 1947
- 15 ————— ; 4, 70, 730-748, Water waves over a channel of  
finite depth with a dock 1948
- 16 ————— ; 6, 2, 210-222, Water waves over a channel of  
finite depth 1950
- 17 ————— ; 9, 30, 164-169, Some remarks on the coupling  
of two ducts 1951
- 18 ————— ; On gravity waves (Fourth Symposium in  
Applied Math. 1951, p.75-87) 1953
- 19 Introductory Note, Waves over beaches of small slope,  
under a dock, under an overhanging cliff, and  
past plane barriers, 7, 1, 101-109 1948
- 20 Isaacson, I.; 7, 1, 201-209, Waves against an overhanging  
cliff 1948
- 21 ————— ; 7, 3, 11-31, Water waves over a sloping  
bottom 1950
- 22 John, F.; 7, 1, 149-200, Waves in the presence of an  
inclined barrier 1948
- 23 ————— ; 7, 2, 13-57, On the motion of floating bodies, I 1949
- 24 ————— ; 2, (On ocean surface waves), The action of  
floating bodies on ocean waves 1949
- 25 ————— ; 7, 3, 45-101, On the motion of floating bodies,  
II 1950
- 26 Keller, J.B. en Goldstein, E.; 15, Febr. 1953, Water wave  
reflexion due to surface tension and floating ice 1953
- 27 Kreisel, G.; 14, 7, 21-44, Surface waves 1949
- 28 Lamb, H.; Hydrodynamics, Dover Publications 1945
- 29 Lewy, H.; 5, 52, 737-775, Water waves on sloping beaches 1946
- 30 Miche, A.; 1, 114, 25-78, 131-164, 270-292, 369-406,  
Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur  
constante ou décroissante 1944
- 31 Milne-Thompson; Theoretical Hydrodynamics, MacMillan 1949
- 32 Paley, R.E.A.C. en Wiener, N.; The Fourier Transform in  
the complex domain. (Amer. Math. Soc. Colloquium  
Publ., XIX) 1934
- 33 Peters, A.S.; 7, 3, 319-354, The effect of a floating mat  
on water waves 1950
- 34 ————— ; 7, 5, 87-108, Water waves over sloping  
beaches and the solution of a mixed boundary  
value problem for  $(\Delta - k^2)\varphi = 0$  in a sector 1952
- 35 ————— ; 10, 235-237, Water waves over sloping  
beaches 1952
- 36 Roseau, M.; 8, 231, 1212-1214, Mouvements ondulatoires  
de la mer 1950
- 37 ————— ; 8, 232, 211-213, 303-306, 479-481 en 233,  
844-845, 916-917, Sur les mouvements ondulatoires  
de la mer sur une plage 1951
- 38 Shapiro, A. en Simpson, L.; 15, Febr. 1953, The effect of  
a broken ice field on water waves 1953



- 39 Stoker, J.J.; 14, 5, 1-54, Surface waves in water of  
variable depth 1947
- 40 Ursell, F.; 12, 43, 374-382, The effect of a fixed  
vertical barrier on surface waves in deep water 1947
- 41 ————— ; 12, 46, 141-153, 153-158, Surface waves on  
deep water in the presence of a submerged  
circular cylinder 1950
- 42 ————— ; 10, 1-7, Discrete and continuous spectra  
in the theory of gravity waves 1952
- 43 Weinstein, A.; 6, 1, 271-278, On surface waves 1949
- 44 Weitz, M.L.; 10, 7-9, Reflection of water waves from  
floating ice in water of finite depth 1952
- 45 Weitz, M.L. en Keller, J.B.; 7, 3, 305-318, Reflection of  
water waves from floating ice in water of finite  
depth 1950
- 46 ————— ; 7, 6, 415-417, Reflection and  
transmission coefficients for waves entering or  
leaving an ice field 1953.

-----